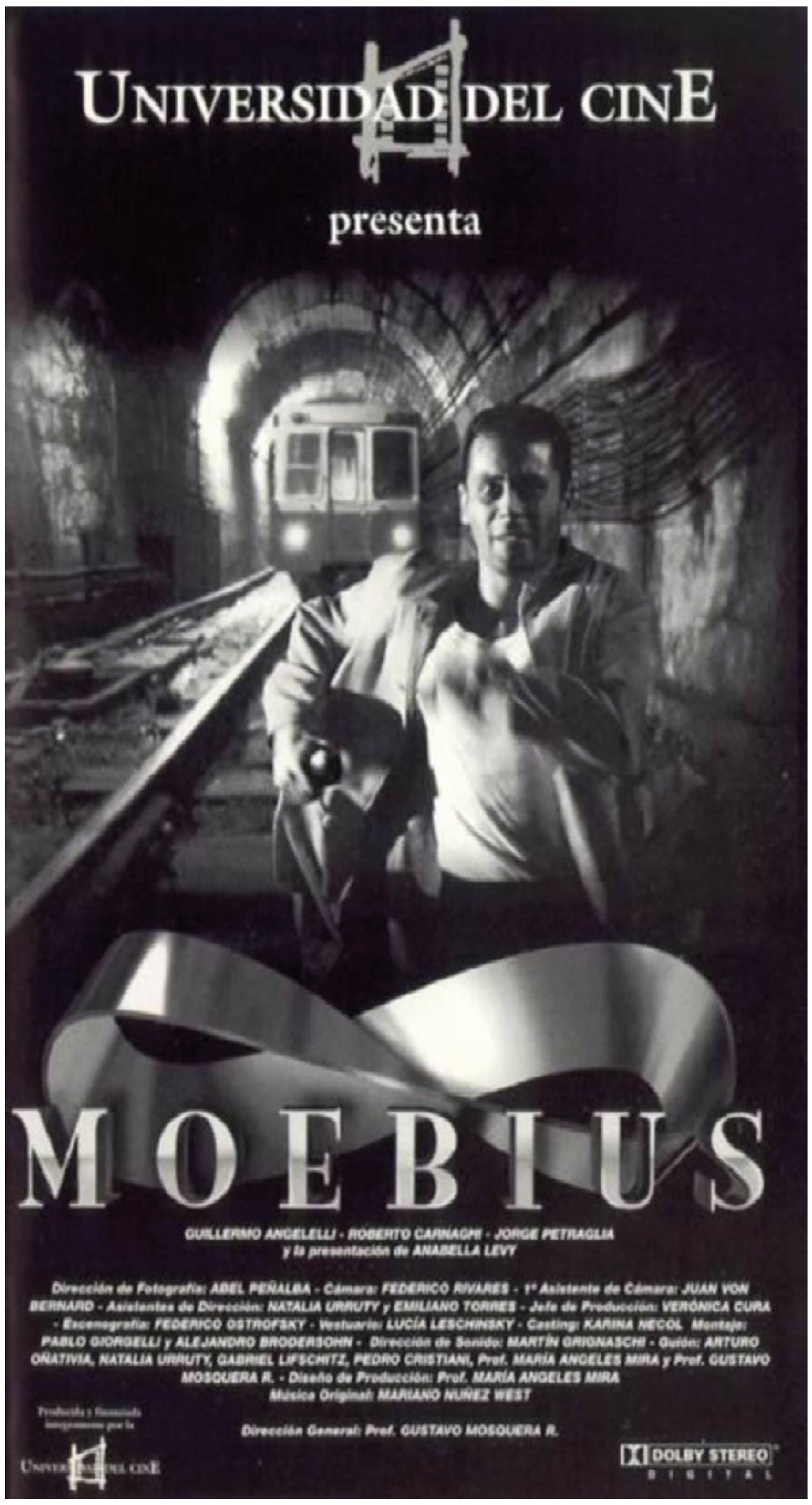
Moebius (1996)

Film di Gustavo Mosquera



Moebius è un film del regista e docente di cinema Gustavo Mosquera, realizzato grazie ad un progetto scolastico dell'Università di Buenos Aires, con risorse economiche molto ridotte.
Il film prende spunto dal racconto *A Subway named Möbius* di Armin Joseph Deutsch e narra delle vicende attorno alla scomparsa di un convoglio della metropolitana della capitale argentina, ottenendo un discreto successo di critica e pubblico nel 1997.

Trama: Gli aspetti matematici presenti nella pellicola coinvolgono principalmente questioni di topologia, "un ramo della matematica che studia le superfici e le converte in formule", come la definisce il protagonista del film Daniel Pratt.
La sparizione misteriosa del treno e le riflessioni del professor Mistein sull'apatia della società arricchiscono il film con un significato politico, legato alla storia argentina di dittature militari e tragedie come quella dei *desaparecidos*.

Le ambientazioni claustrofobiche dei tunnel della metropolitana, poco illuminati e intrecciati tra di loro, abilmente riprese da Mosquera e il suo team di studenti, contribuiscono alla crescente tensione del film, capace di catturare l'attenzione e anche di fare dimenticare alla mente di un matematico che, per quanto sia una superficie particolare con molte proprietà matematiche interessanti, nemmeno il nastro di Möbius può rendere infiniti i tunnel o far sparire i treni.

Regia: un collettivo di 41 studenti della Universidad del Cine di Buenos Aires
Sceneggiatura: Gustavo Mosquera R. e Natalia Urruty
Fotografia: Abel Peñalba
Montaggio: Pablo Giorgeli e Alejandro Brodershon
Interpreti: Guillermo Angelelli, Roberto Carnaghi, Jorge Petralia e Annabella Levy
Provenienza: Argentina
Anno: 1996
Durata: 87'

Beccastrini, S., & Nannicini, M.P. (2010). *Il cinema e la matematica. Sulle tracce di una promettente amicizia*. Trento: Erickson.
Recensioni a cura di Francesca Leali, Massimo Ferri e Michele Mulazzani (Università di Bologna).

August Ferdinand Möbius

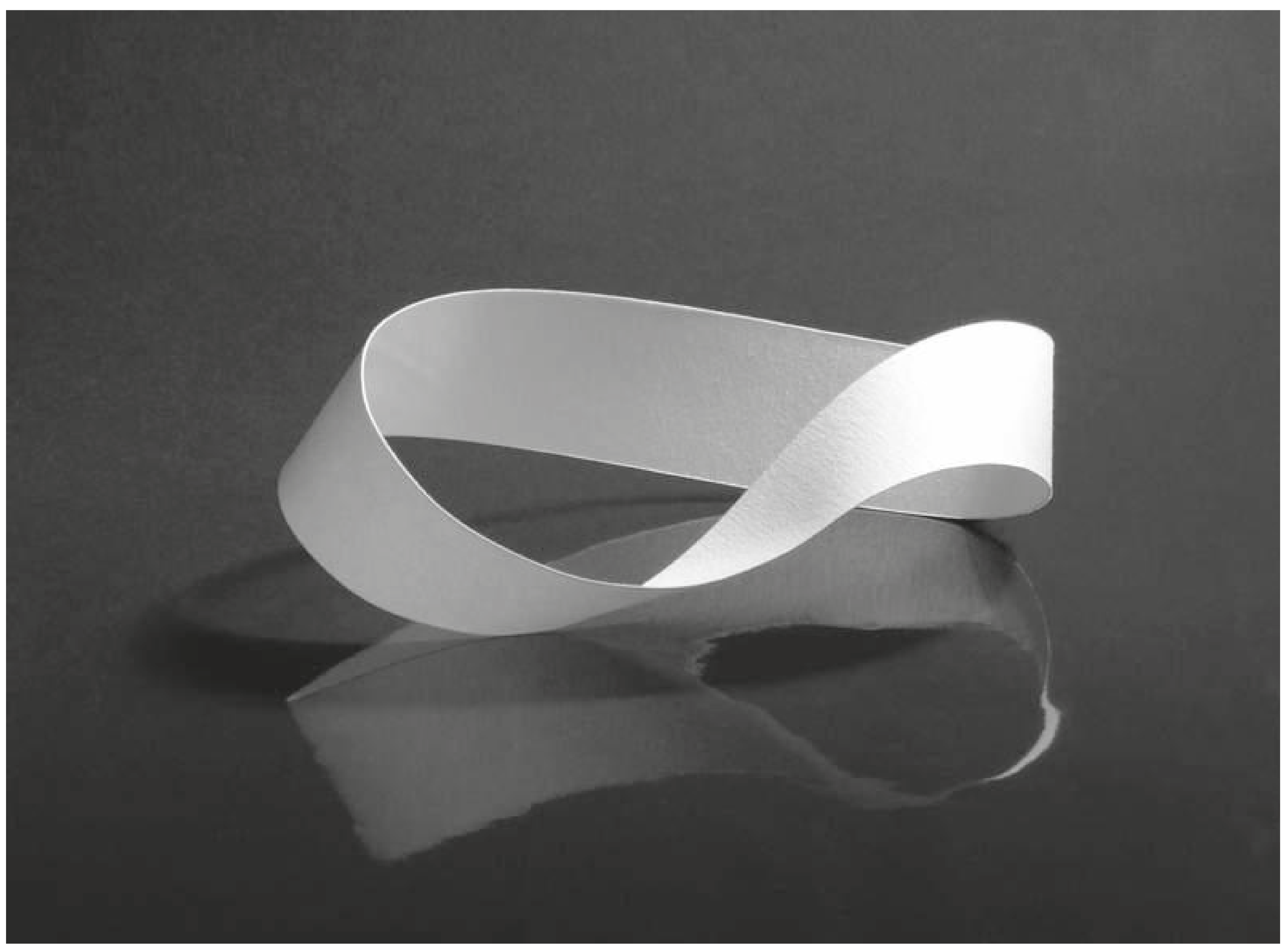
Bad Kösen 17.11.1790 - Lipsia 26.09.1868

August Ferdinand Möbius è stato un matematico e astronomo tedesco, vissuto tra il XVIII e il XIX secolo.
Si dedicò in particolare all'astronomia, alla geometria proiettiva, alla teoria dei numeri e alla topologia.

Studiò all'Università di Lipsia, dove divenne in seguito professore, dapprima straordinario nel 1816 e ordinario soltanto nel 1844, anno in cui ottenne la cattedra di astronomia.
Nel corso dei suoi studi fu allievo di importanti astronomi e matematici dell'epoca, quali Karl Mollweide, Johann C. F. Gauss e Johann F. Pfaff.

In suo onore, l'asteroide 2000 DQ3 è stato rinominato "28516 Möbius".

August Ferdinand Möbius (1790 – 1868).



Il nastro di Möbius.

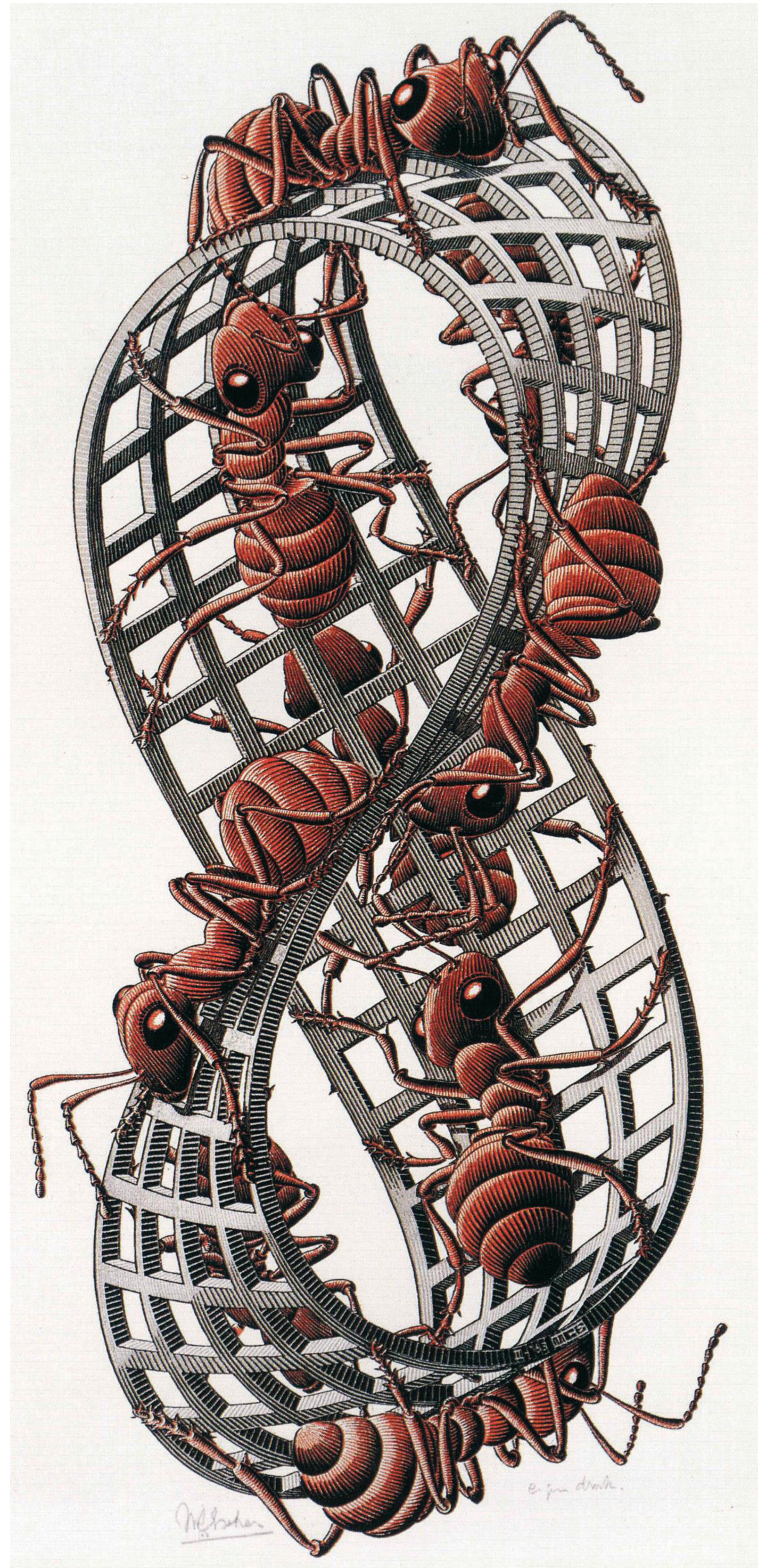
I contributi di Möbius in matematica furono molteplici, tant'è che si conta più di un oggetto matematico che porta il suo nome: la funzione di Möbius, la trasformata di Möbius e le trasformazioni di Möbius.
Ciononostante, il motivo per cui viene maggiormente ricordato è il nastro di Möbius, una superficie topologica avente una sola faccia e un solo bordo.
Benché il primo a pubblicare un articolo riguardo a questa superficie fu Johann Benedict Listing, il nastro porta il nome di Möbius poiché quest'ultimo ne studiò le caratteristiche in maniera più dettagliata.

Beccastrini, S., & Nannicini, M.P. (2010). *Il cinema e la matematica. Sulle tracce di una promettente amicizia.* Trento: Erickson.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Mobius.html

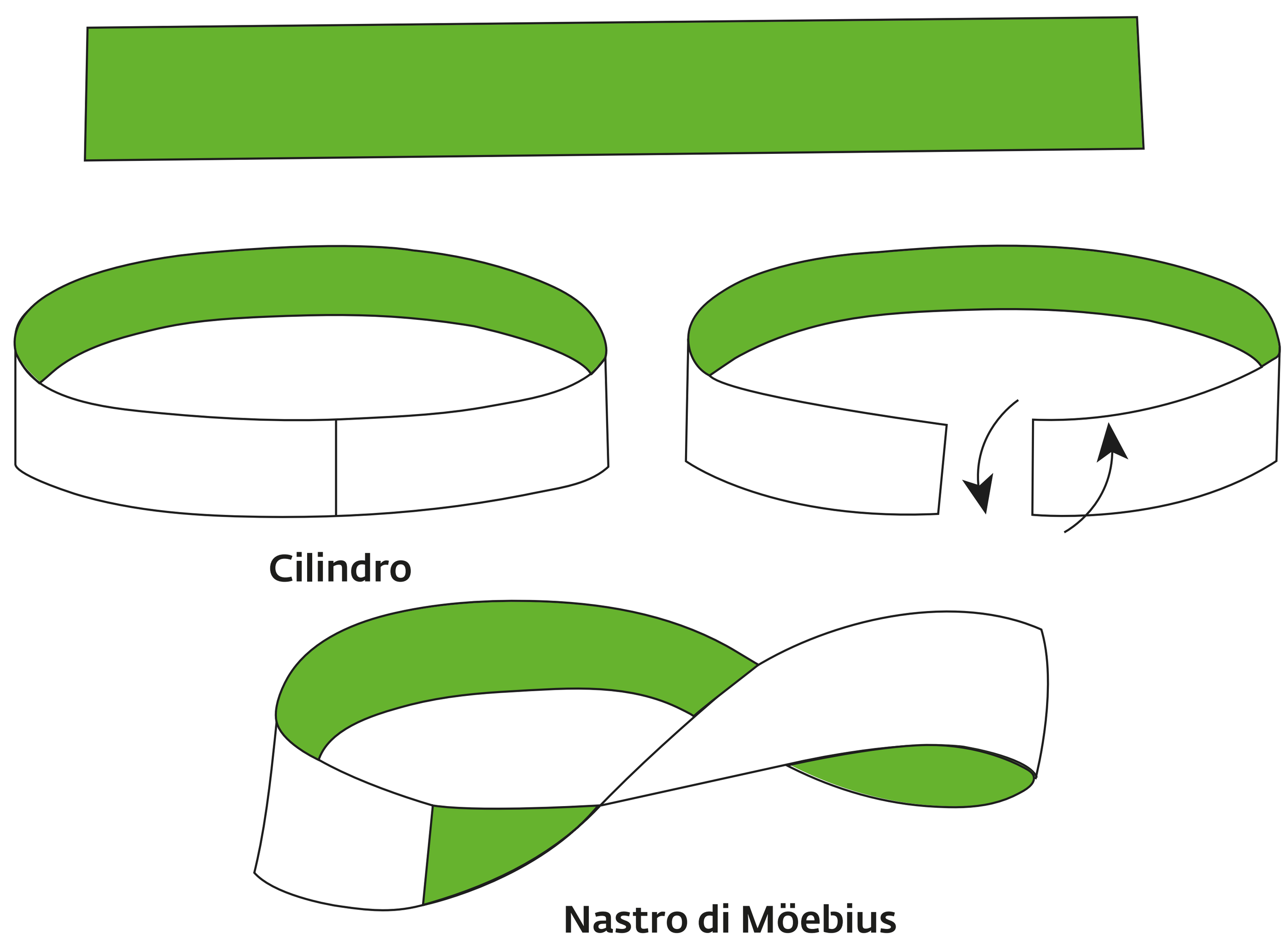
Il nastro di Möbius

Il nastro di Möbius è una superficie la cui caratteristica principale è sicuramente quella di possedere una sola faccia e un solo bordo.

Nell'immagine a fianco è riportata una xilografia dell'artista M.C. Escher dal titolo *Anello di Möbius II* del 1963. Osservando il movimento delle formiche lungo il nastro si può intuire come sia possibile percorrerlo tutto (potenzialmente per un tempo infinito) senza mai attraversare il bordo. In superfici in cui è possibile riconoscere un «fuori» e un «dentro» (un cubo, una sfera ecc.) questo non avviene.



M.C. Escher, Anello di Möbius II, 1963.



Come costruire un nastro di Möbius:

1. Ritagliare una striscia di carta *(di circa 3x30 cm)*.
2. Tenendola per le estremità effettuare una torsione di 180°.
3. Piegarla in modo da unire le due estremità e incollarla.

Effettuando una scansione del codice QR sulla destra è possibile accedere ad un filmato sul portale YouTube che illustra come costruire il nastro di Möbius e alcune particolarità riguardo alle possibilità di tagliare il nastro per ottenere nuove figure.

Matematicamente parlando, il nastro di Möbius è una superficie rigata avente una sola faccia e un solo bordo. Possiede inoltre caratteristica di Eulero-Poincaré uguale a zero.
Sfruttando i codici QR in fondo alla pagina è possibile ottenere maggiori informazioni sul significato di queste caratteristiche matematiche.

Superficie rigata

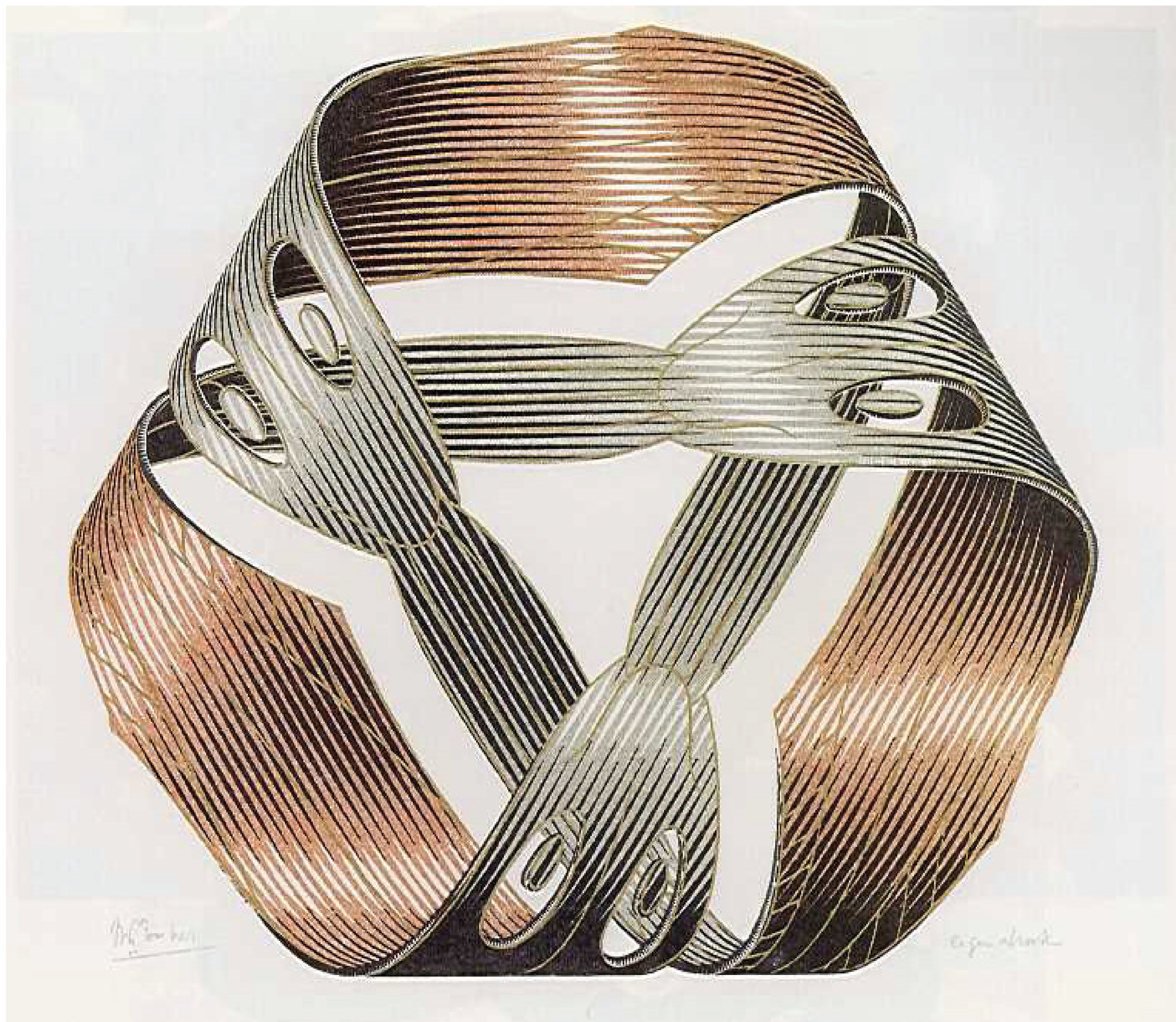
Superficie orientabile

Caratteristica di Eulero-Poincaré

Oltre la matematica…

La particolare conformazione e geometria del nastro ha attratto l'interesse di esponenti di svariati campi.

L'artista M.C. Escher (1898-1972), ad esempio, ha dedicato al nastro due xilografie, intitolate rispettivamente *Anello di Möbius I e II*.



M.C. Escher, Anello di Möbius I, 1961.

Max Bill, Endless Ribbon, 1953.

Anche lo scultore svizzero Max Bill (1908-1994) ha scolpito delle opere aventi come forma il nastro di Möbius. Curiosamente, però, la sua prima opera non faceva riferimento a Möbius: lo scultore infatti non era a conoscenza dell'esistenza del nastro ed era convinto di aver creato un oggetto nuovo.

Rappresentazioni del nastro si trovano in molte altre opere d'arte, alcune di queste precedenti alla sua definizione in termini matematici: la raffigurazione ritenuta la più antica è rappresentata in un mosaico del III secolo d.C. proveniente dall'antica città di Sentinum, oggi parte del comune di Sassoferrato, nelle Marche.

Mosaico di Aion e lo Zodiaco,
gliptoteca di Monaco di Baviera, III secolo d.C.

Altre influenze o rappresentazioni del nastro si riscontrano ad esempio in letteratura, nella musica, nell'architettura, nel cinema e nel marketing.

Applicazioni del nastro

Così come nelle arti, il nastro di Möbius si può trovare anche in natura.

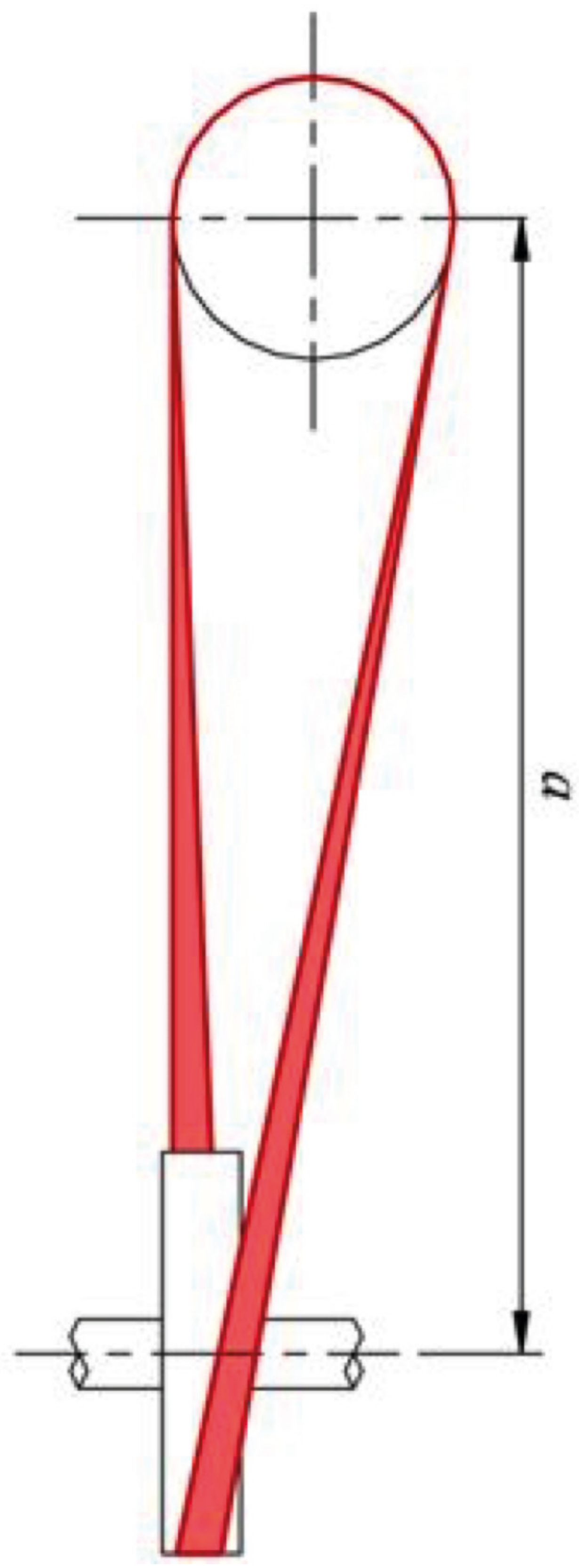
In chimica ad esempio alcune proteine hanno la forma di un nastro di Möbius e la loro attività biologica dipende strettamente da questa proprietà: se fossero piegate in maniera usuale, con due facce (nastro cilindrico), non sarebbero più biologicamente attive.

Negli anni Sessanta, Edgar Heilbronner osservò un particolare tipo di aromaticità (che viene chiamata per l'appunto aromaticità di Möbius) in certi composti organici. La sua struttura non era definita da un anello, come abitualmente succedeva, ma da una disposizione degli orbitali proprio a nastro di Möbius.

Anche in fisica esistono fenomeni in cui è possibile riconoscere il nastro di Möbius. Ad esempio, nella traiettoria delle particelle cariche intrappolate nel campo magnetico della terra; oppure nella direzione di polarizzazione di un fascio di luce in prossimità del punto focale del fascio.

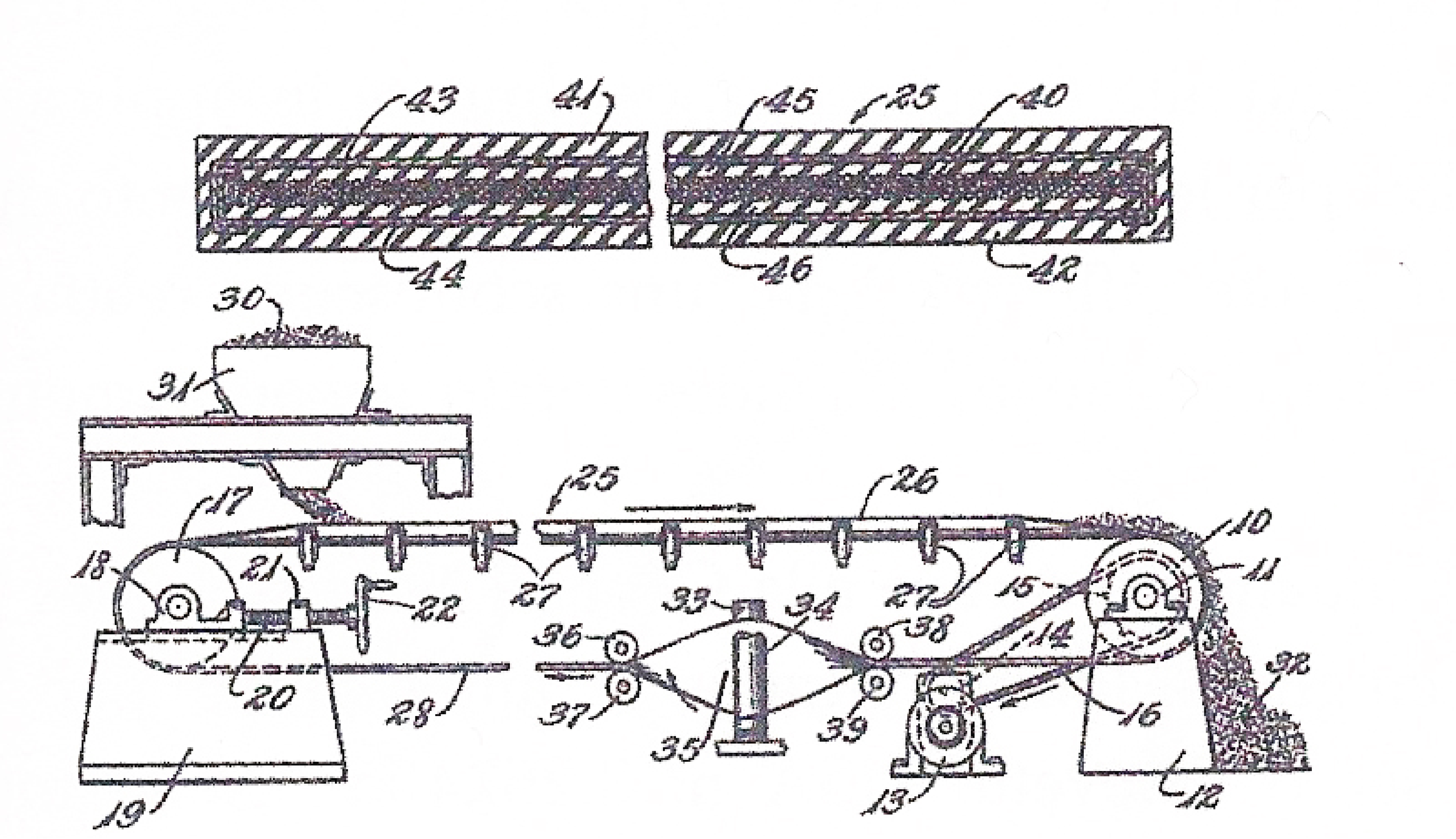
Esistono anche delle applicazioni pratiche del nastro, in particolare nell'industria e nella meccanica.
Le cinghie di trasmissione tra pulegge possono utilizzare il nastro di Möbius per consentire di consumare l'intera superficie a disposizione, così da durare di più e garantire maggiore stabilità, come nel caso di una trasmissione tra pulegge poste a 90°.

Nei banchi di taglio utilizzati nella lavorazione degli schiumati poliuretanici, le lame sono a forma di nastro di Möbius. Questo accorgimento consente di raddoppiare la lunghezza del filo di taglio della lama e di conseguenza si dimezza, a parità di impiego, l'usura del filo stesso.



Trasmissione tra pulegge mediante
cinghia a nastro di Möbius.

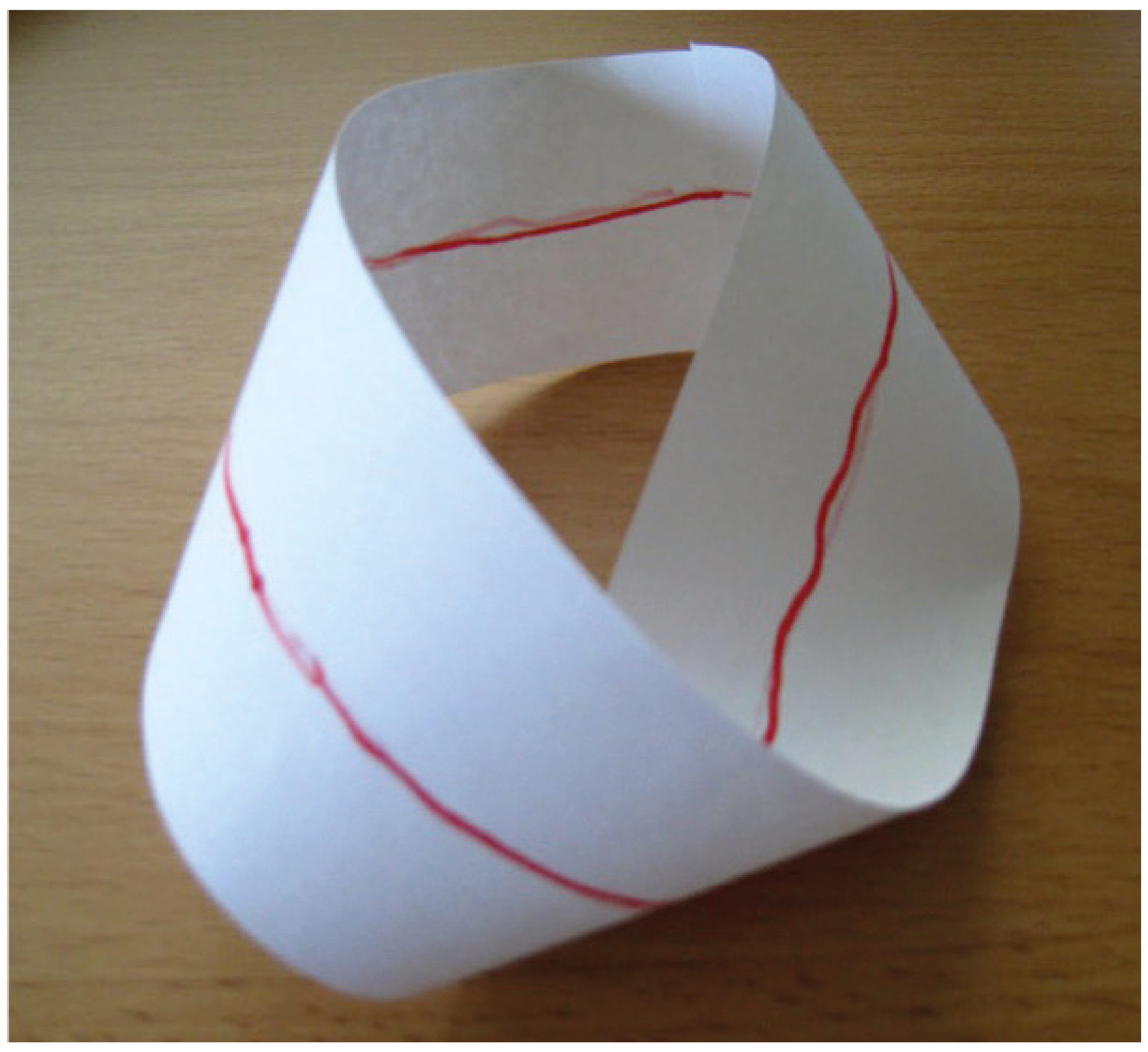
In campo informatico il nastro di Möbius è stato utilizzato per realizzare cartucce dati ad accesso casuale contenenti nastri magnetici registrati su entrambe le facce, raddoppiando lo spazio di memorizzazione.



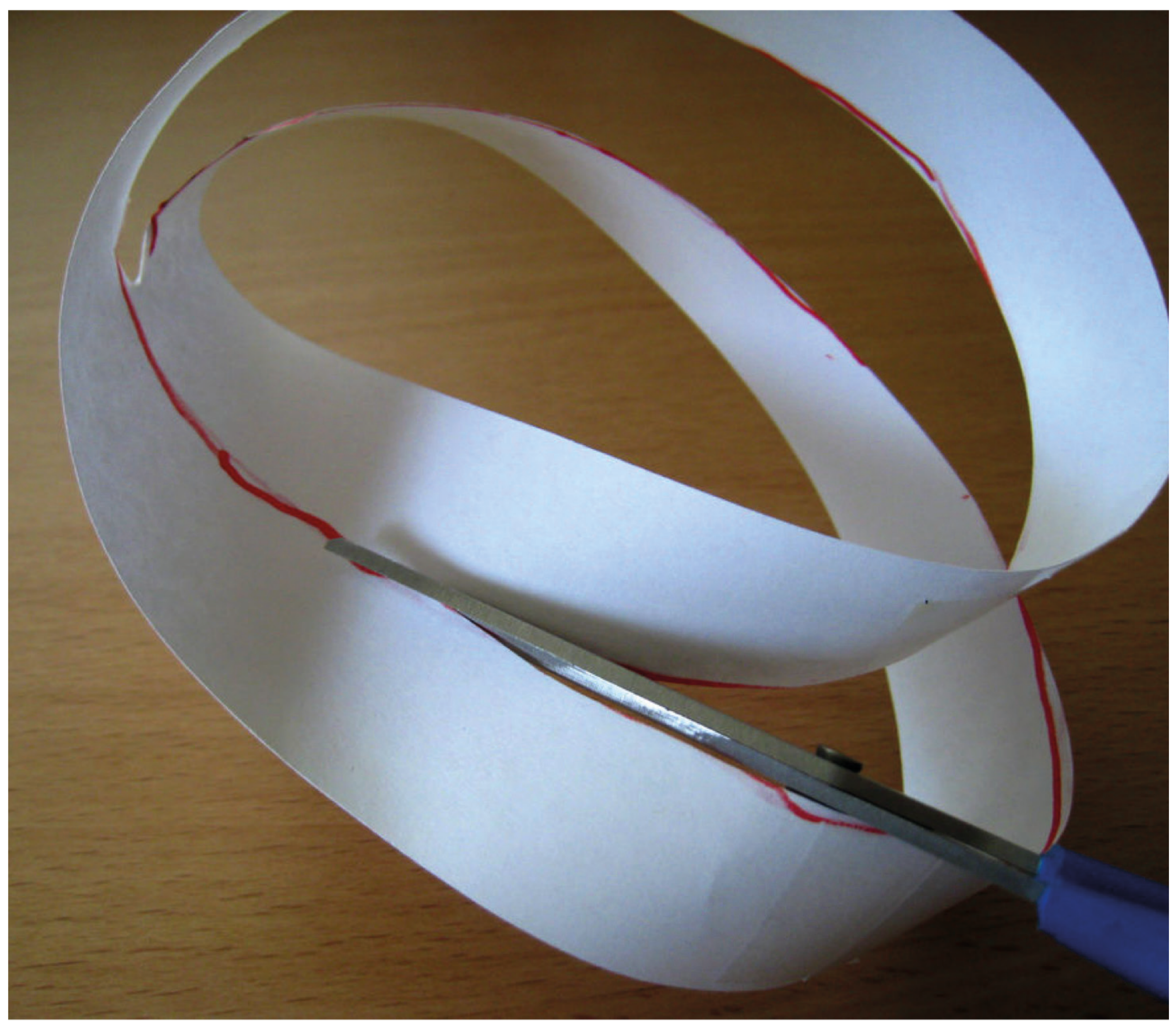
Nastro trasportatore a forma
di nastro di Möbius.

I tagli del nastro di Möbius

Un'attività molto interessante con il nastro di Möbius, a metà strada tra il gioco e lo studio delle sue proprietà, consiste nel tagliare longitudinalmente il nastro e scoprire quali superfici si ottengono: i risultati variano in base al numero di parti in cui si divide il nastro e al numero di torsioni che la figura di partenza possiede; un nastro di Möbius possiede per definizione una sola torsione, ma si possono costruire altre figure con più torsioni.

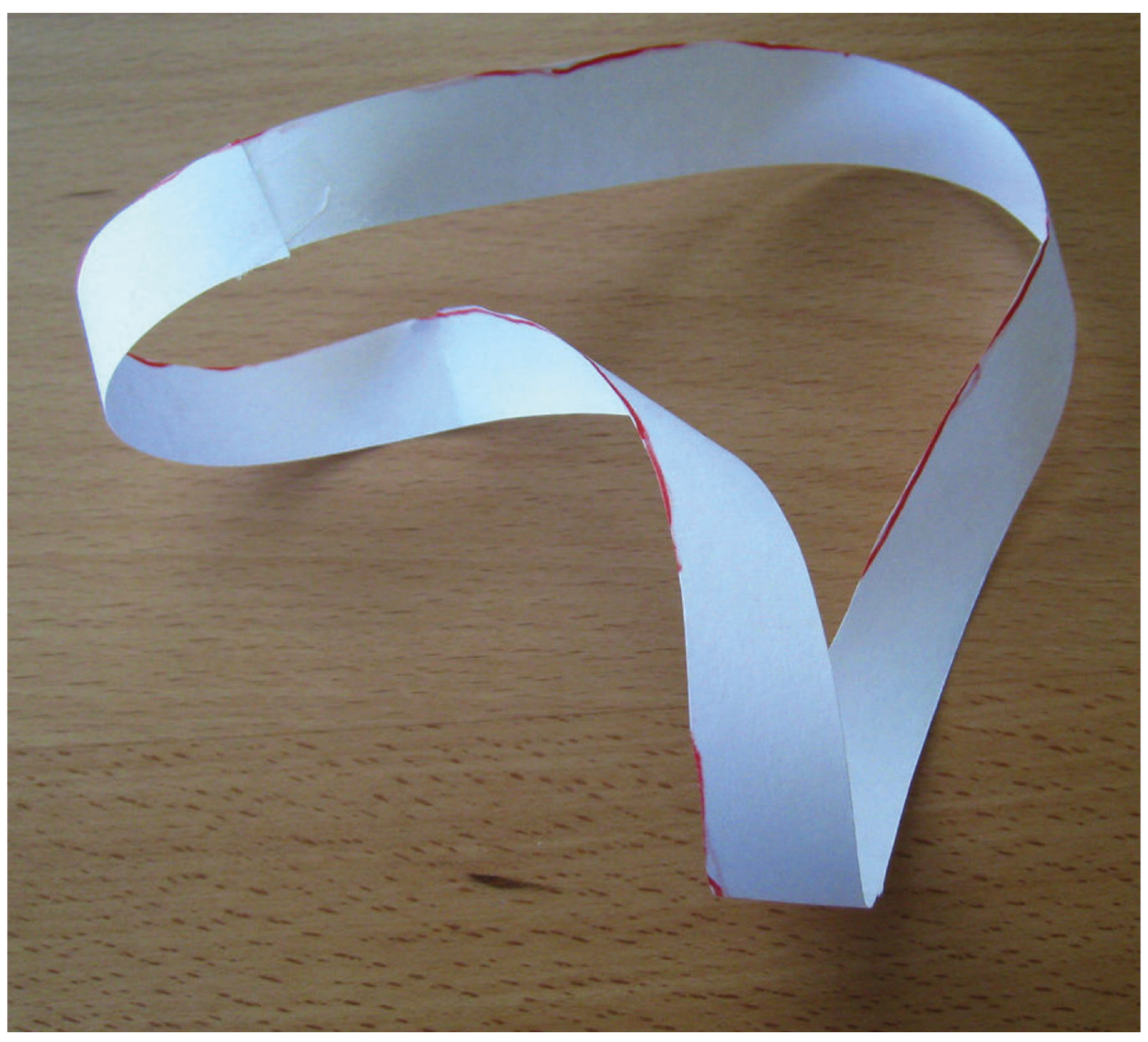


Una prima curiosità la si può scoprire tracciando una linea su entrambe le facce del foglio rettangolare iniziale, in corrispondenza della mediana di maggiore lunghezza e chiudendolo a nastro di Möbius.
Notiamo che, avendo ora una sola faccia, la linea percorre tutto il nastro tornando al punto da cui si è cominciato a tracciarla.
Successivamente, lo si taglia seguendo la linea tracciata, come mostrano le immagini a fianco.



Tagliando il nastro in questo modo ci si potrebbe aspettare di ottenere due nastri separati o chiusi ad anello; invece il risultato è una figura lunga il doppio rispetto a quello di partenza!
Inoltre non si tratta più di un nastro di Möbius dal momento che possiede più di una torsione.

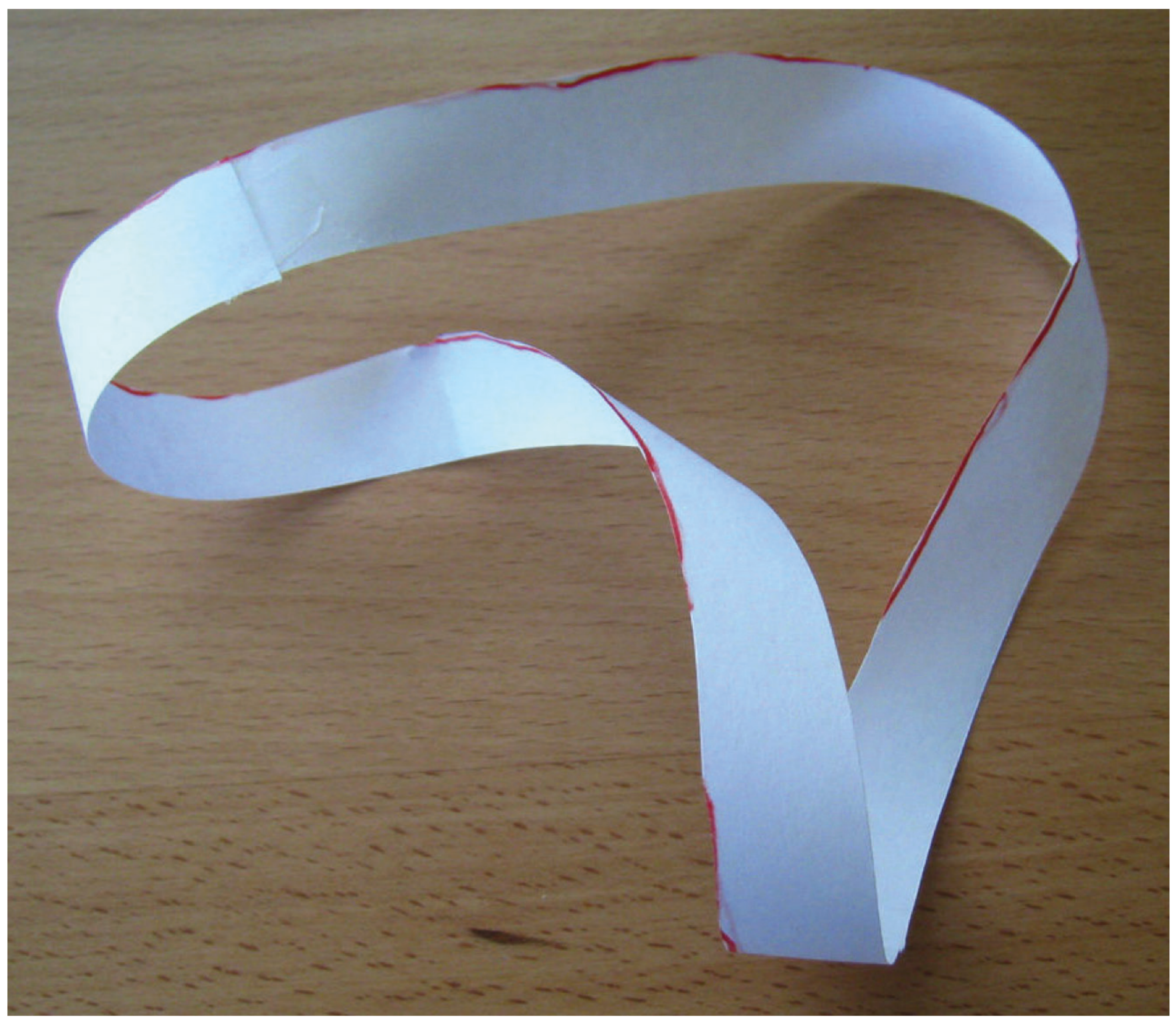
Si può provare a ripetere il procedimento, questa volta tracciando la linea ad un terzo della larghezza del nastro. Quale sarà il risultato di tale taglio? Ipotizzate e provate!



Scansionando il codice QR, è possibile conoscere la risposta e visionare il procedimento completo dei due tagli.

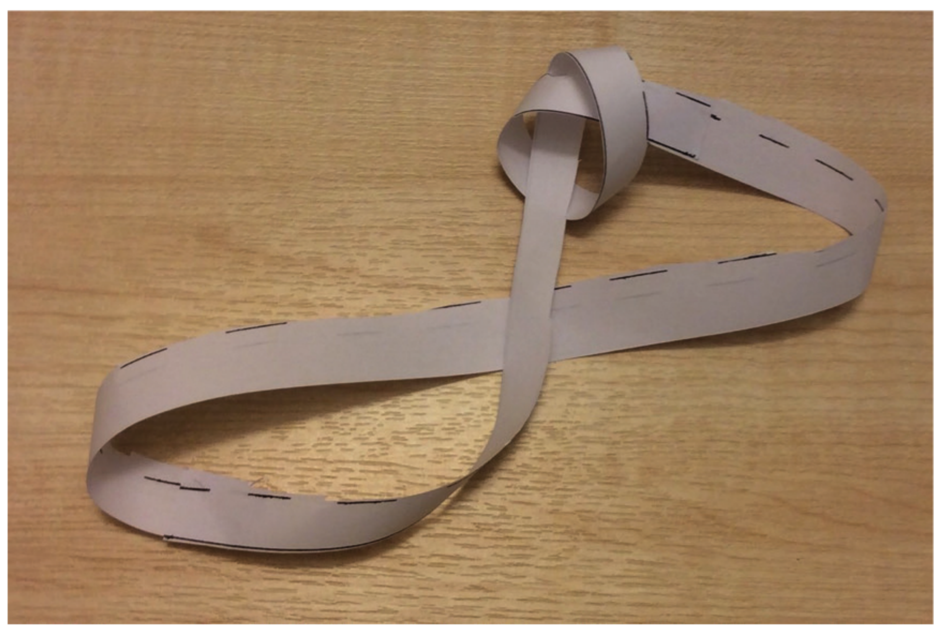
Generalizzazione dei tagli

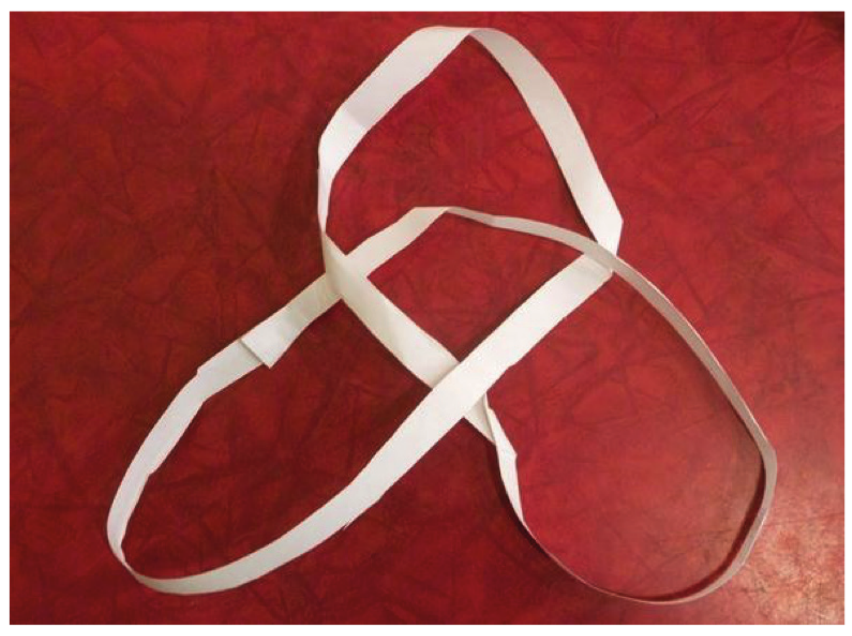
Abbiamo visto cosa succede tagliando il nastro di Möbius a metà e a un terzo della larghezza, ma è possibile anche tagliare ad un quarto, un quinto ecc.



Inoltre, non dobbiamo limitarci per forza al nastro di Möbius, è possibile tagliare anche altri tipi di figure con più torsioni, come ad esempio la figura risultante dal primo taglio che abbiamo realizzato.

Possiamo dunque sbizzarrirci costruendo figure con una, due, tre torsioni e tagliarle in modi diversi: così facendo sarà possibile ottenere nuove superfici, di cui non sempre è facile prevedere l'aspetto.





Esempi di nastri o intrecci di nastri ottenibili con più torsioni e/o più suddivisioni.

In base al numero di torsioni:
Indichiamo con m il numero di torsioni di $180°$ del rettangolo iniziale.

Se m è dispari, la figura avrà una sola faccia e un solo bordo e se la si taglia lungo la mediana di maggiore lunghezza, il risultato è una figura con $2m + 2$ torsioni. Se m è maggiore o uguale a 3, il risultato è un annodato di più figure.

Se m è pari (maggiore o uguale a 2), la figura risultante dal taglio lungo la mediana è composta da 2 anelli legati fra loro, ciascuno di m torsioni.

Per un approfondimento sul nastro di Möbius consigliamo la visione di un filmato prodotto da RaiScuola a cui è possibile accedere effettuando una scansione del codice QR sulla destra

In base al numero di suddivisioni:
Supponiamo di suddividere il nastro di Möbius in n parti e di tagliare secondo le linee tracciate in questo modo.

Se n è pari, otteniamo una figura di larghezza $1/n$ del nastro iniziale e tagliando avremo infine $n/2$ nastri annodati di larghezza $1/n$, ciascuno con 4 torsioni.

Se n è dispari, otteniamo una figura di larghezza $1/n$ del nastro iniziale, annodato con $(n-1)/2$ nastri lunghi il doppio del nastro di partenza, aventi larghezza $1/n$ e con 4 torsioni.