Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana

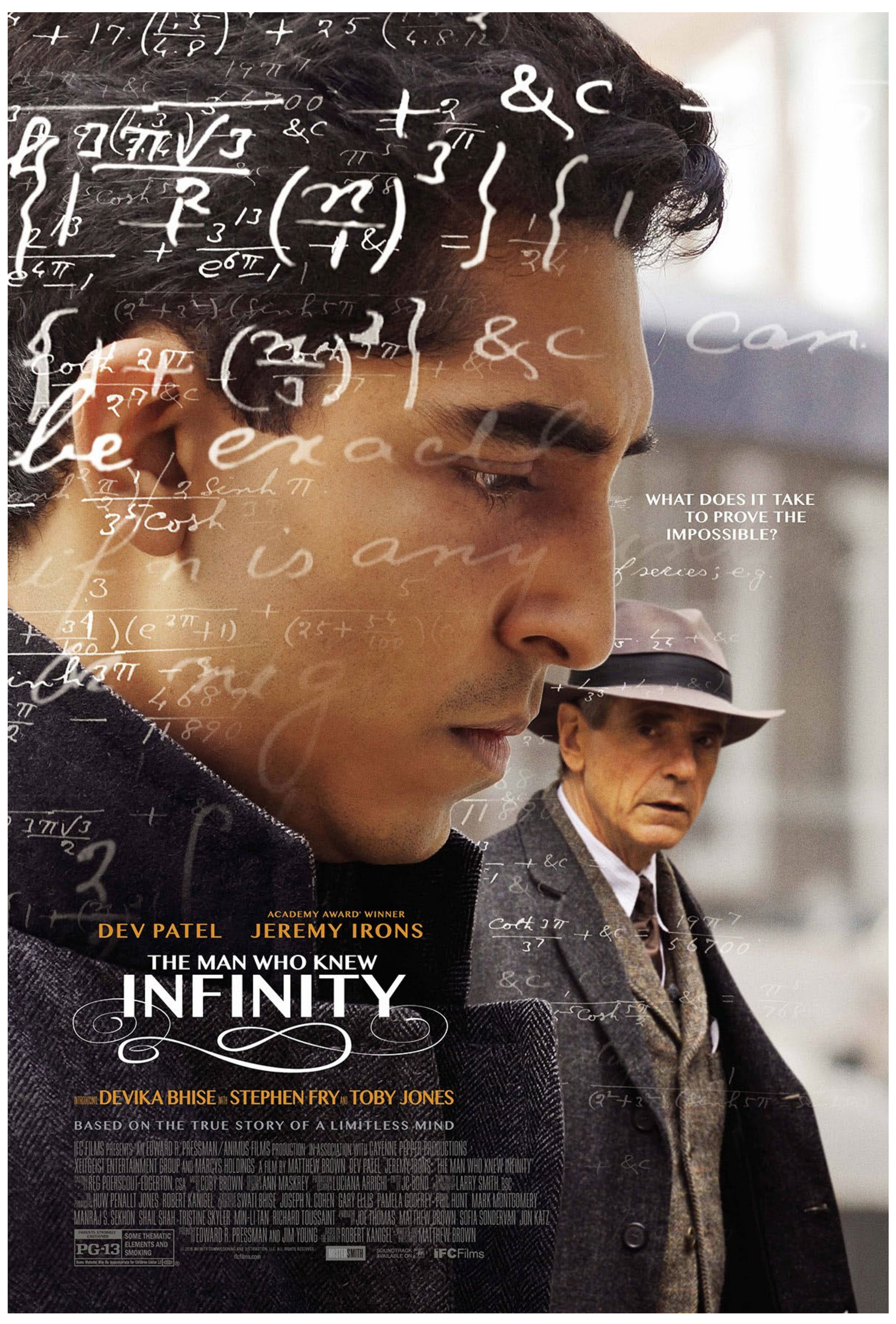
SUPSI Matematicando*film*

L’uomo che vide l’infinito

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 - 1920)

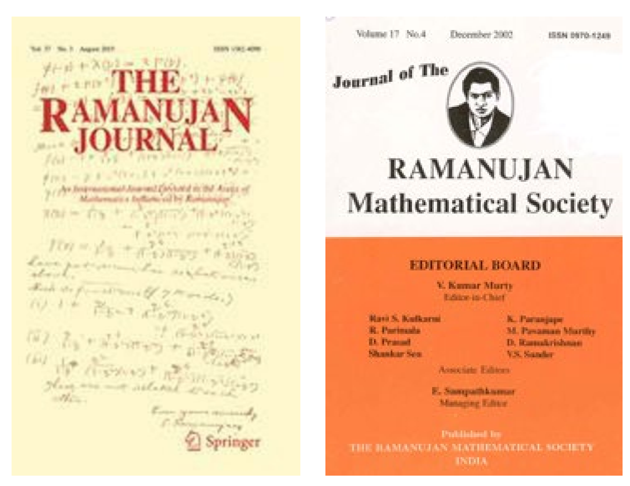
Di umili origini, Ramanujan, percorse un cammino decisamente inusuale che lo portò, dal bancone di un magazzino indiano alla ricerca matematica a Cambridge in Inghilterra, una delle università più prestigiose del mondo, un ambiente fecondissimo per tutte le scienze e in cui sono stati prodotti molti contributi critici sulla matematica e sulla logica. Tutti gli scienziati di oggi sono in gran parte debitori dei circoli intellettuali inglesi dei primi anni del XX secolo.
Ramanujan lavorò in molte aree della matematica, in particolare nella teoria analitica dei numeri. Tra i suoi temi preferiti c’è l’infinito e alcuni paradossi stupefacenti legati ad esso, come ad esempio:

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$$



Locandina del film sulla vita di Ramanujan.

Si può dire che Ramanujan abbia aperto nuove strade per la ricerca matematica, tanto che oggi esistono riviste internazionali e società scientifiche nate apposta per fare ricerca nelle direzioni da lui indicate.
Tra queste il *Ramanujan Journal*, un’importante rivista scientifica che copre tutte le aree della matematica ma che studia in special modo i temi derivati dai risultati di Ramanujan e la *Ramanujan Mathematical Society*, che ha sede a Tiruchirappalli (Tamil Nadu, India) e riunisce importantissimi studiosi di tutto il mondo.



Riviste scientifiche dedicate a Ramanujan.

Fonti
Kanigel, R. (2003). *L’uomo che vide l’infinito*. Milano: Rizzoli.
Leavitt, D. (2009). *Il matematico indiano*. Milano: Mondadori.
Wolfram, S. (2016). Who Was Ramanujan? Disponibile da https://writings.stephenwolfram.com/2016/04/who-was-ramanujan/

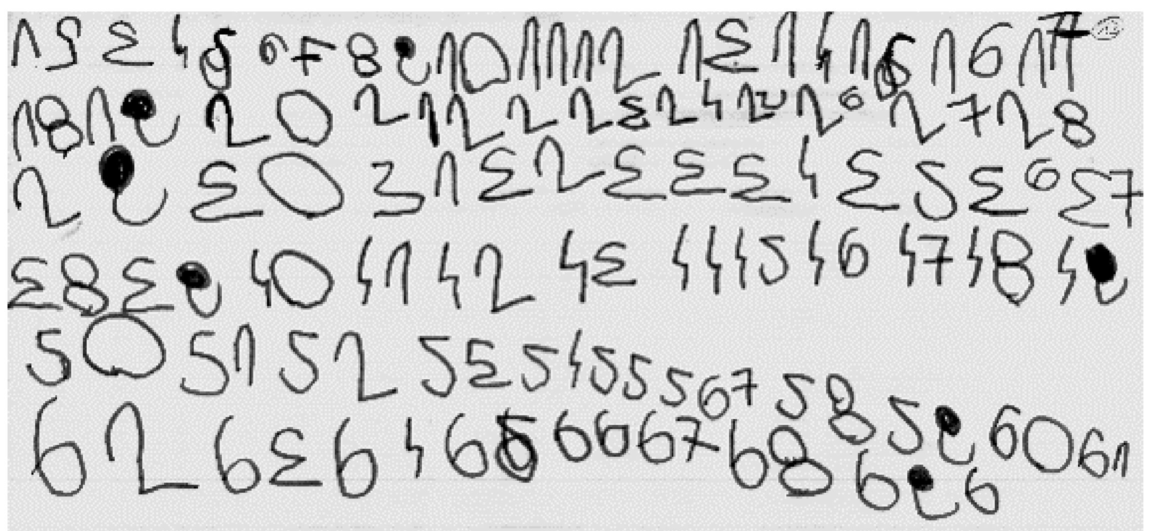
A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

Le stranezze dell'infinito

Quando c'è di mezzo l'infinito si possono trovare dei risultati apparentemente assurdi che sono in realtà "dimostrabili", ossia verificabili attraverso una sequenza di passaggi logici. Bisogna però prestare molta attenzione quando si fanno i calcoli con l'infinito.

Nella dimostrazione della **Somma di Ramanujan** esplicitata a fianco, c'è un'ipotesi implicita: che le quantità indicate con *A*, *B* e *C* si possano trattare come numeri.
Ma *A*, *B* e *C* sono delle somme infinite: varranno le stesse regole aritmetiche che valgono per i numeri naturali?

Quando si manipolano somme infinite, come se fossero quantità finite, si può giungere a situazioni curiose e paradossali, come quella della somma di Ramanujan: sommando infinite quantità positive otteniamo un numero negativo!



Fin da piccoli abbiamo delle convinzioni sull'infinito matematico. Per me l'infinito è... «Mi è venuto in mente i numeri». Questa la risposta e il disegno di un bambino di I elementare.

La somma di Ramanujan

Lemma di Grandi

$$1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

Dimostrazione
Poniamo $A=1-1+1-1+\ldots$
Allora:

$$\begin{aligned}1-A&=1-(1-1+1-1+\ldots)\\&=1-1+1-1+\ldots=A\end{aligned}$$

Quindi $1-A=A$, cioè $2A=1$, da cui $A=\frac{1}{2}$.

Secondo lemma

$$1-2+3-4+\ldots=\frac{1}{4}$$

Dimostrazione
Poniamo $B=1-2+3-4+\ldots$
Allora:

$$\begin{aligned}A-B&=(1-1+1-1+\ldots)-(1-2+3-4+\ldots)\\&=1-1+1-1+\ldots-1+2-3+4-\ldots\\&=(1-1)+(-1+2)+(1-3)+\ldots\\&=0+1-2+3-4+\ldots=B\end{aligned}$$

Quindi $A-B=B$, cioè $2B=A$, da cui $B=\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$.

Somma di Ramanujan

$$1+2+3+\ldots=-\frac{1}{12}$$

Dimostrazione
Poniamo $C=1+2+3+\ldots$
Allora:

$$\begin{aligned}B-C&=(1-2+3-4+\ldots)-(1+2+3+\ldots)\\&=1-2+3-4+\ldots-1-2-3-\ldots\\&=(1-1)+(-2-2)+(3-3)+\ldots\\&=-4-8-12-\ldots=-4C\end{aligned}$$

Quindi $B-C=-4C$, cioè $3C=-B$, da cui $C=-\frac{B}{3}=-\frac{1}{12}$.

L'infinito non finisce mai di stupirci. Avreste mai pensato che:
- i numeri quadrati (cioè ottenuti elevando alla seconda i numeri naturali) sono tanti quanti i numeri naturali?
- i numeri razionali sono tanti quanti i naturali?
- i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti di un suo lato?
- i punti di un segmento "più lungo" sono tanti quanti i punti di uno "più corto"?
- i punti di un segmento sono tanti quanti i punti di una retta?

Fonti

Dodds, M. (2018). The Ramanujan Summation: 1 + 2 + 3 + ...+ ∞ = -1/12? Disponibile da https://medium.com/cantors-paradise/the-ramanujan-summation-1-2-3-1-12-a8cc23dea793
Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2010). *Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson.

A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

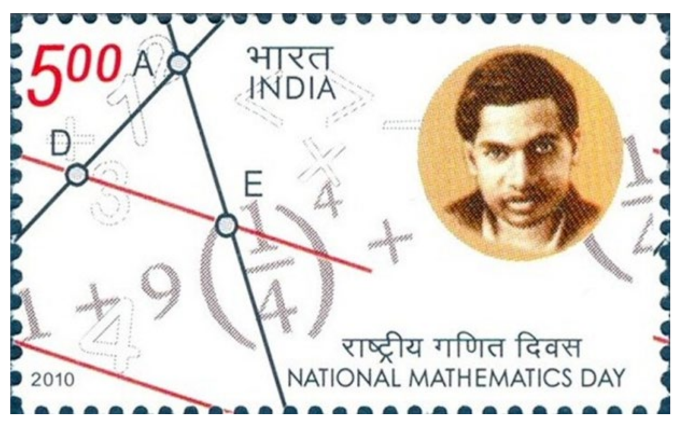
La tradizione matematica indiana

In India, nel corso di una storia millenaria, sono stati fatti molti fondamentali studi matematici.
Tale disciplina serviva a scopi pratici come costruire templi e altre strutture, programmare lavori agricoli, stilare calendari, risolvere problemi quotidiani, ma anche interrogarsi su concetti astratti come il tempo e l'infinito.
Di seguito alcune delle principali tappe:

- La prima occorrenza scritta del teorema di Pitagora è nel *Baudhāyanasūtra* (⁻VIII sec.), un poema di argomento matematico applicativo.
- Nel ⁻V sec. il grammatico *Pāṇini* formulò una teoria algebrica della lingua con la quale diede le regole del sanscrito, lingua in cui sono scritti i testi religiosi e i grandi poemi dell'India classica.
- Nel ⁻IV sec. nacque, sulla spinta di un nuovo movimento religioso, la scuola *Giainista*, che, mossa da interessi calendariali, giunse a definire numeri altissimi, da calcolare con funzioni esponenziali di base 2, oltre ad occuparsi di equazioni di vario tipo e di combinatoria.
- La scuola logica *Nyāya* fu attiva dal ⁻VI sec. al XVII sec. su vari ambiti scientifici e filosofici, formulò alcuni schemi corretti di ragionamento e di inferenza, diversi da quelli della logica di tradizione greca.
- Nel VII sec. comparve lo *zero*, che già prima faceva da segnaposto al «vuoto» in altre culture in alcuni sistemi di notazione e algoritmi di calcolo. In questo periodo lo zero guadagnò regole di calcolo proprie e divenne un numero a tutti gli effetti. Il matematico e astronomo *Brahmagupta* (598 - 668) definì delle regole anche per il calcolo con numeri interi negativi.

I *kolam* sono disegni geometrici ornamentali realizzati con farina di riso dalle donne del sud dell'India.

Francobollo commemorativo dei 100 anni della *Indian Mathematical Society*, la più antica organizzazione indiana promotrice di studi e ricerche in matematica.



Il governo dell'India dichiara ogni anno il compleanno di Ramanujan (22 dicembre) come il National Mathematics day.

Fonti
Bagni, G.T. (1996). *Storia della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Zero. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.
D'Amore, B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, 4, 481-500.
Joseph, G. G. (2011). *The Crest of the Peacock*. Princeton: Princeton University Press.
O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2000). MacTutor History of Mathematics archive. Disponibile da http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

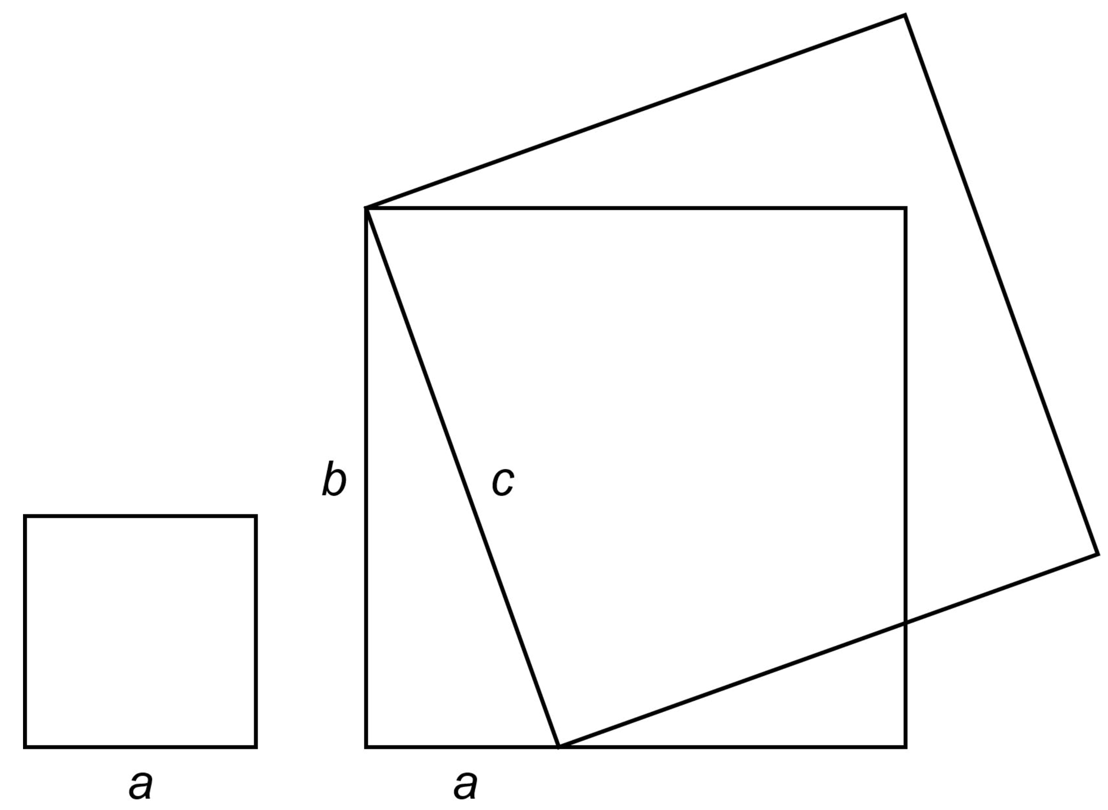
A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

Alcuni risultati della matematica indiana

Cosa ti ricorda questo risultato?
È il teorema di Pitagora!

Problema nel *Baudhāyanasūtra*

Costruire un quadrato la cui area sia la somma delle aree di due quadrati diseguali dati.



Attenzione!
Non tutte le regole di Brahmagupta
sono valide per il nostro sistema aritmetico…
Sai trovare quali sono le regole non accettabili?

Regole di *Brahmagupta*

1. Quando zero è sommato a un numero o sottratto da un numero, il numero resta invariato. Un numero moltiplicato per zero diviene zero.
2. Un debito meno zero è un debito.
3. Una fortuna meno zero è una fortuna.
4. Zero meno zero è zero.
5. Un debito sottratto da zero è una fortuna.
6. Una fortuna sottratta da zero è un debito.
7. Il prodotto di zero per un debito o per una fortuna è zero.
8. Il prodotto di zero per zero è zero.
9. Il prodotto o quoziente di due fortune è una fortuna.
10. Il prodotto o quoziente di due debiti è una fortuna.
11. Il prodotto o quoziente di un debito e una fortuna è un debito.
12. Il prodotto o quoziente di una fortuna e un debito è un debito.
13. Numeri positivi o negativi, quando divisi per zero, danno una frazione con zero a denominatore.
14. Zero diviso per un numero negativo o positivo o è zero, o è rappresentato con una frazione con zero a numeratore e una quantità finita a denominatore.
15. Zero diviso zero è zero.

L'idea di *Bhāskara II*

Per il matematico *Bhāskara II* (1114-1185) se esistesse una frazione con un denominatore uguale a 0, sarebbe invariante rispetto all'addizione o alla sottrazione con un numero qualunque.
Cioè per qualsiasi numero x varrebbero queste regole:

$$\frac{1}{0}+x=\frac{1+0\cdot x}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{0}-x=\frac{1-0\cdot x}{0}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}$$

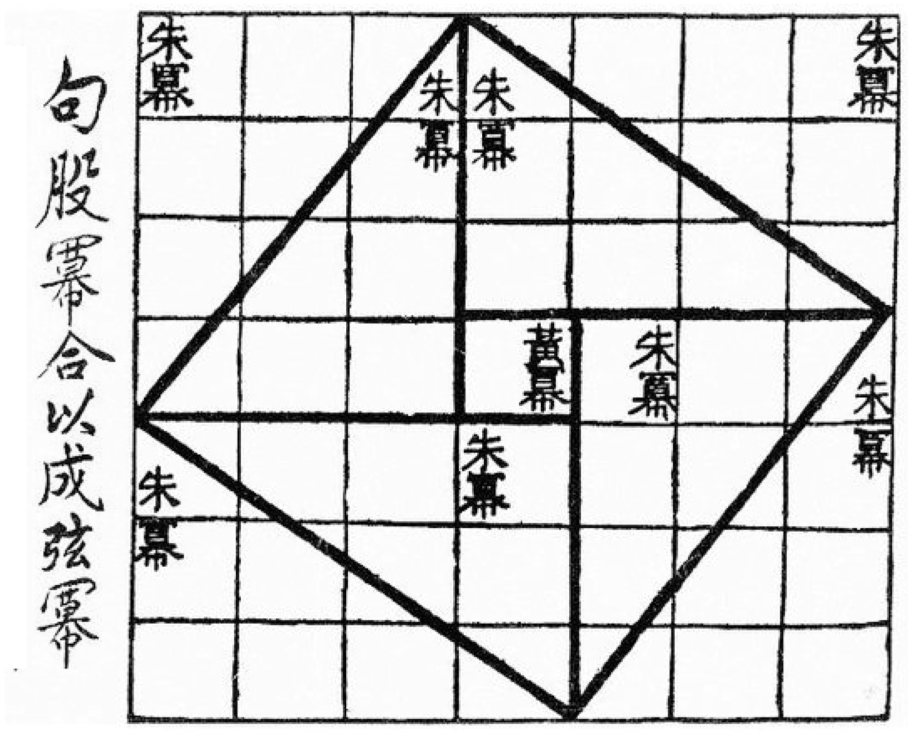
Sono le stesse regole che noi utilizziamo con l'infinito:

$$\infty + x = \infty$$
$$\infty - x = \infty$$

A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

Due, tre, molte matematiche

Cos'è la matematica? Chi la fa? Come si usa? Esiste certamente una matematica formale, accademica, che si insegna nelle scuole e su cui si fa ricerca nelle università.
Poi esiste una matematica più familiare a ciascuno di noi, fatta di pratiche di conteggio, calcolo, misura, stima, inferenza… cose che abbiamo imparato nella vita quotidiana, non formalizzate e che più che dal ragionamento provengono dalla tradizione o dal sentire di un'epoca. In questo senso ogni gruppo socioculturale ha una sua raccolta di pratiche e conoscenze matematiche, che può essere anche molto diversa da quella di un altro gruppo.

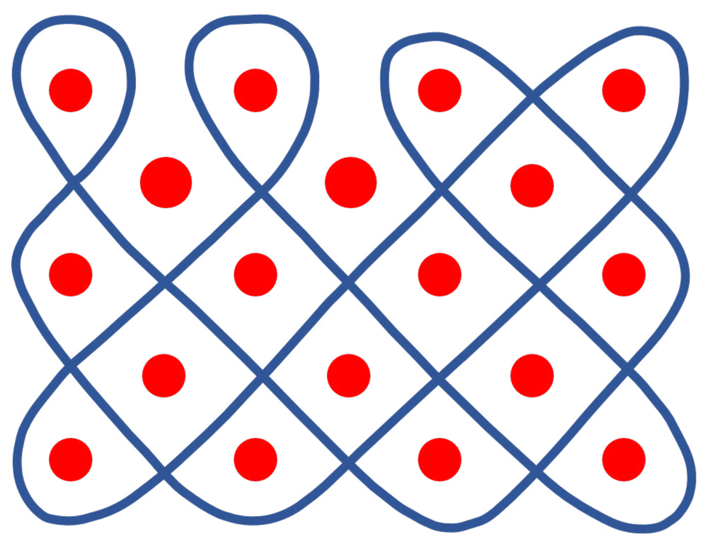


Il teorema di Pitagora nella formulazione del *Classico aritmetico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo*, testo cinese del ⁻ III sec.

Il *mancala* è un gioco di strategia molto diffuso nell'Africa nordoccidentale.

I *sona* sono disegni realizzati con un reticolo di punti e una o più linee chiuse che accompagnano il racconto di una storia nelle campagne angolane, come ad esempio la seguente:

Il cacciatore e il cane
Un cacciatore chiamato Tshipinda andò a caccia portando con sé il cane Kawa e catturò una capra selvatica. Tornato al villaggio, il cacciatore divise la carne con Calala, il padrone del cane. A Kawa restarono solo gli ossi.
Dopo qualche tempo Tshipinda tornò a chiedere i servizi del cane, ma questo si rifiutò di aiutarlo e gli disse di portarsi Calala dato che era con lui che era solito dividere la carne.



Fonti
Allgyer, L. (2018). Mancala: Cool Facts. Disponibile da https://lolitaallgyer.com/mancala/
D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
Gerdes, P. (2014). *Disegni africani dall'Angola per vivere la matematica.* Morrisville: Lulu.com.
Nicosia, G. G. (2010). *Cinesi, scuola e matematica*. Morrisville: Lulu.com.

A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

Calcoli, algoritmi, macchine

Per fare le operazioni ci sono tanti diversi modi (*algoritmi*).
Ogni cultura ha le sue rappresentazioni degli oggetti matematici e i suoi algoritmi per utilizzarli.

Onko (il leone)

Ecco i passaggi dell'algoritmo ghanese per il calcolo del *minimo comune multiplo*:

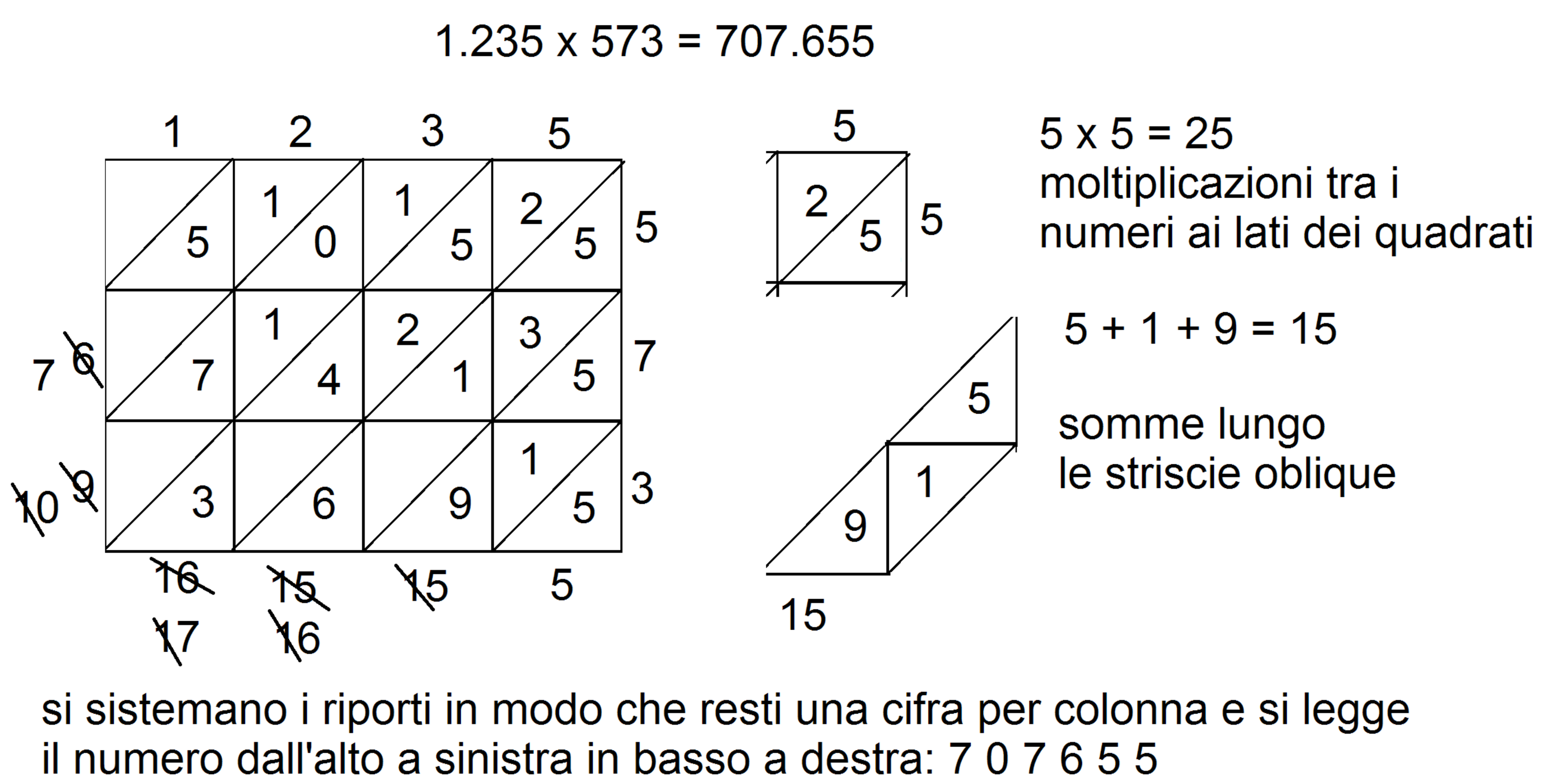
- Prendi un numero primo che divida almeno uno dei numeri e prova a usarlo per dividerli tutti.
- Se il numero viene diviso per il numero primo scrivi il risultato, altrimenti riporta il dividendo.
- Prosegui finché non rimangono solo 1.
- Il mcm è il prodotto dei numeri primi che hai usato per dividere.

mcm di 26 12 9 8 5

2	26	12	9	8	5
2	13	6	9	4	5
2	13	3	9	2	5
2	13	3	9	1	5
3	13	1	3	1	5
3	13	1	1	1	5
5	13	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13 = 9360$

Moltiplicazione a gelosia

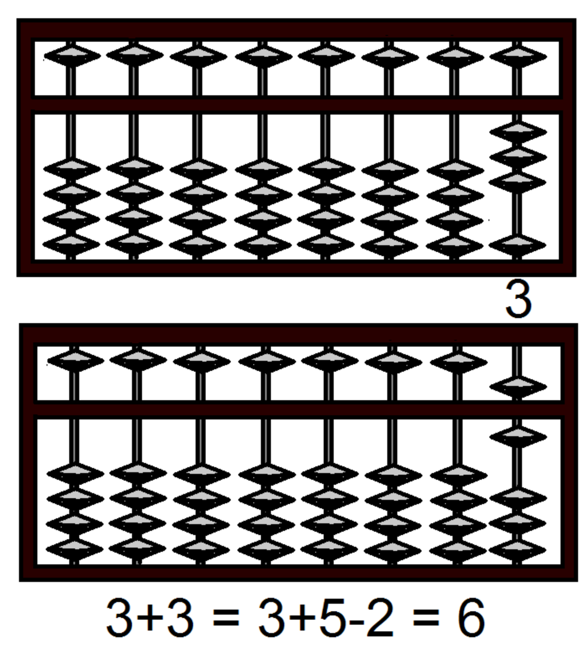


Usando questo metodo le moltiplicazioni con i numerali del sistema posizionale in base 10 vennero importate in Europa da Leonardo Fibonacci (1170-1250), dopo un lungo sviluppo nel mondo arabo.

Soroban

Nel *soroban* valgono le palline spostate verso il settore centrale. Quelle sopra valgono 5, quelle sotto 1.

Il 12 novembre 1946 a Tokyo la rivista statunitense *Stars and Stripes* organizzò una gara di calcolo tra il furiere Thomas Nathan Woods, con un calcolatore elettrico di ultimo modello, e il maestro d'abaco Kiyoshi Matsuzaki, ragioniere di un ministero giapponese, col suo *soroban*. Dopo una lunga serie di addizioni di 50 addendi, aventi ciascuno tra le 3 e le 6 cifre, sottrazioni tra numeri aventi tra le 6 e le 8 cifre, alcune moltiplicazioni e divisioni tra numeri aventi tra le 5 e le 12 cifre e infine alcuni problemi con più operazioni diverse, la modernissima macchina occidentale, con i suoi tempi di calcolo velocissimi ma con tempi di digitazione lunghi, fu sconfitta dall'antico strumento giapponese. Da allora la sfida tra macchine da calcolo sempre più sofisticate e l'antico *soroban* viene ripetuta ogni anno. Vince sempre il *soroban*.



Esempio di calcolo con il *soroban*.

Una tavoletta votiva giapponese.

Fonti
Nicosia, G. G. (2016). *Matematica e scuola in Cina Corea e Giappone*. Bologna: Pitagora.

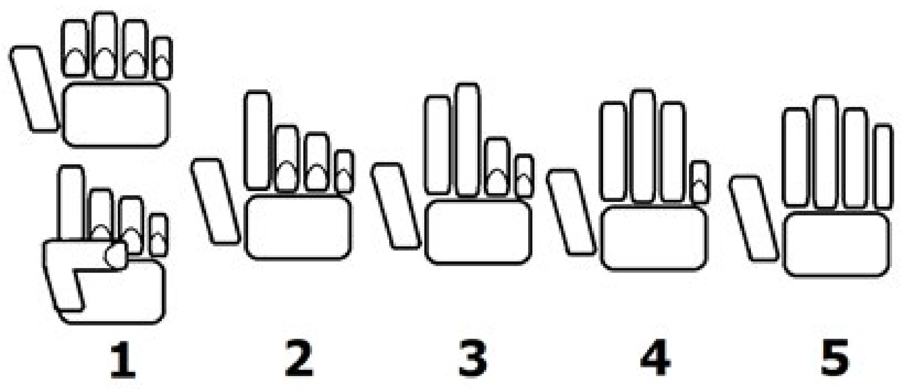
A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana

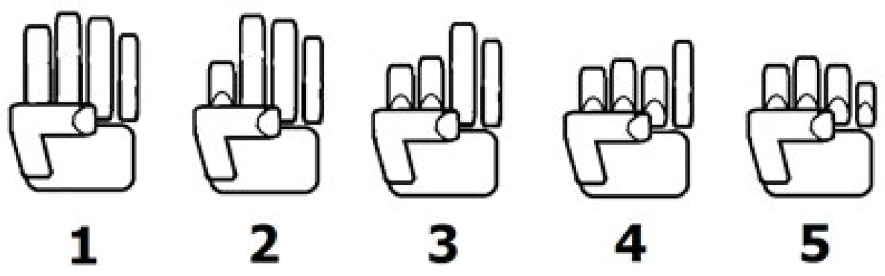
SUPSI Matematicandofilm

Contiamo con le dita

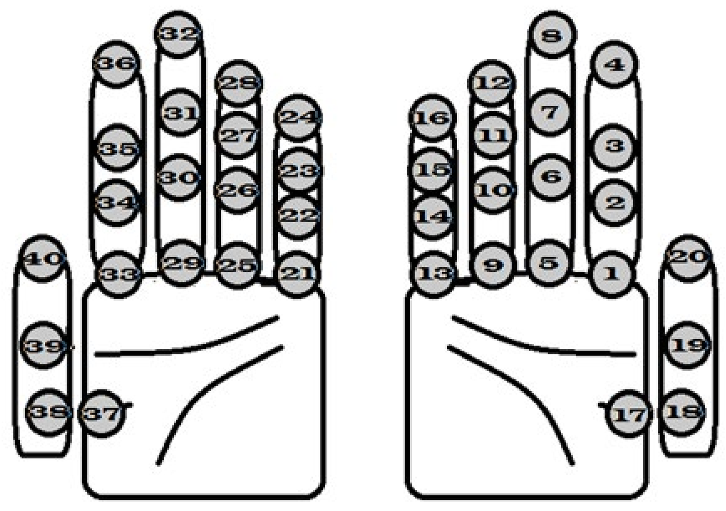
Ci sono molti modi per farlo



Nella maggior parte dei paesi europei si conta con le mani sollevando un dito alla volta in un ordine preciso.



In alcuni paesi (ad esempio, in Giappone) si conta con le mani abbassando un dito alla volta in un ordine preciso.

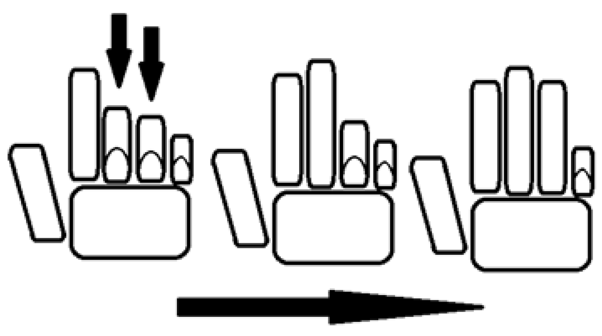


Nei paesi di cultura indoislamica (ad esempio, Bangladesh, Pakistan, India) si toccano con la punta del pollice le intersezioni delle falangi e altri punti in un ordine preciso.

Principio del successivo
La rappresentazione di un numero contiene quella dei precedenti
(aspetti ordinali e cardinali sono fusi: 3 si rappresenta col terzo dito o terzo punto della mano)

Dietro questa rappresentazione c’è un’idea dei numeri naturali simile a quella di *Giuseppe Peano* (1858-1932).

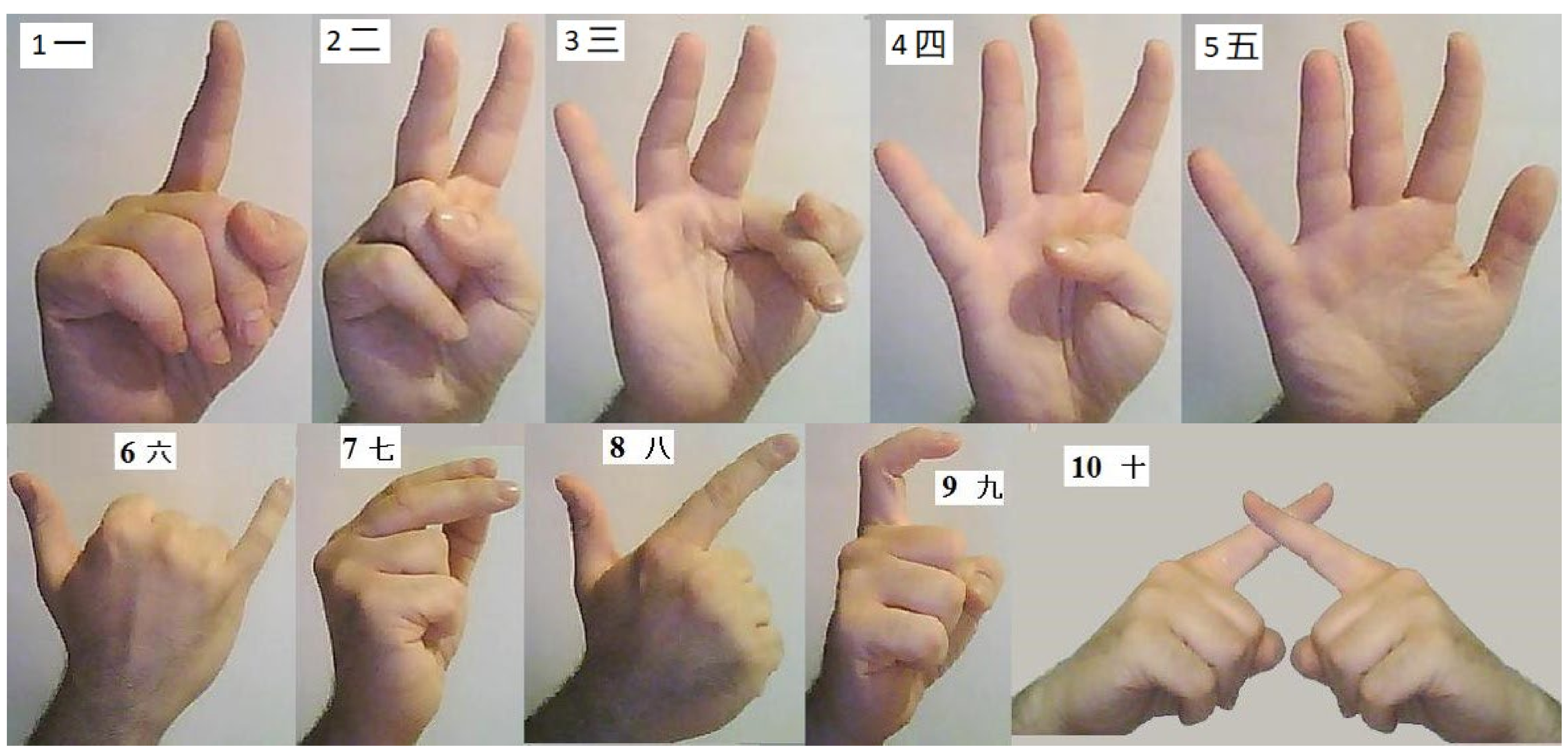
Così si possono fare facilmente addizioni e sottrazioni alzando o abbassando dita o scorrendo tra le falangi.



2 + 2 = 4

Assiomi di *Peano* per i numeri naturali
Chiamiamo insieme dei *numeri naturali* ℕ l’insieme che ha queste caratteristiche:

1. contiene 0 (o, in altre impostazioni, 1);
2. ogni suo elemento ha un *successivo*, che è ancora un elemento di ℕ;
3. elementi diversi hanno successivi diversi;
4. 0 non è successivo di nessun elemento;
5. ogni sottoinsieme che contenga 0 e il successivo di ogni suo elemento coincide con l’insieme ℕ (assioma di *induzione*).



Il metodo cinese per contare fino a 10 si basa (anche) sulla rappresentazione dei caratteri scritti.

Così però non si possono fare operazioni come l’addizione e la sottrazione utilizzando il conteggio delle dita!

Fonti
Ifrah, G. (1983). *Storia generale dei numeri*. Milano: Mondadori.
Nicosia, G. G. (2016). *Matematica e scuola in Cina, Corea e Giappone*. Bologna: Pitagora.
Nicosia, G. G. (2018). *Matematica e cultura*. Roma: Aracne.

A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana

SUPSI Matematicandofilm

Scrivere i numeri

Per scrivere i numeri ci vuole un “sistema numerale” detto anche “notazione”. Ogni sistema numerale è fatto di segni e regole di scrittura e lettura. Ce ne sono tantissimi! Tutti hanno un insieme di segni che rappresentano dei numeri naturali in modo diretto: *numerali fondamentali*. Questi segni hanno origine nella storia della società che li ha prodotti e bisogna impararli a memoria. Ecco alcuni esempi.

	Zero	Uno	Due	Tre	Quattro	Cinque	Sei	Sette	Otto	Nove	Dieci	Cin-quanta	Cento	Cinque-cento	Mille	Dieci-mila
INDOARABI	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
ARABI	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩						
PUNJABI	੦	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯						
CINESE TESTUALE	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十		百		千	万
CINESE FLOREALE	〇	〡	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩						
ROMANI		I				V					X	L	C	D	M	
MAYA	𝋠	𝋡				𝋥										
EGIZIO GEROGLIFICO		𓏺									𓎆		𓍢		𓆼	𓂭
GE’EZ		፩	፪	፫	፬	፭	፮	፯	፰	፱	፲	፶	፻			

	Venti	Trenta	Quaranta	Sessanta	Settanta	Ottanta	Novanta
GE’EZ	፳	፴	፵	፷	፸	፹	፺

Tutti gli altri numeri si scrivono con combinazioni di questi segni, cioè con numerali composti. Le regole di composizione possono essere molto diverse.

REGOLA ADDITIVA
III = 1 + 1 + 1 = 3

REGOLA MOLTIPLICATIVA
二十 = 2×10 = 20

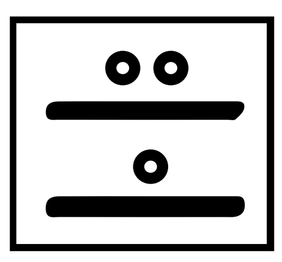
REGOLA DEL COMPLETAMENTO
IV = 5 − 1 = 4
IX = 10 − 1 = 9

NOTAZIONE POSIZIONALE
1'121 = 1 × 1'000 + 1 × 100 + 2 × 10 + 1
Il sistema indoarabo è posizionale in *base* 10

Molti altri sistemi sono misti, in parte posizionali e in parte additivi.

Sistema cronologico
16:25:12 = 16h + 25m + 12s

Sistema Maya



(2 + 5) × 20 = 140
1 + 5 = 6

140 + 6 = 146

Fonti

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia*. Vol. I. Bari: Dedalo.
Nicosia, G. G. (2008). *Numeri e culture*. Trento: Erickson.
Nicosia, G. G. (2016). *Matematica e scuola in Cina, Corea e Giappone*. Bologna: Pitagora.
Nicosia, G. G. (2018). *Cultura e matematica. Il caso degli studenti pakistani.* Roma: Aracne.
Zaslavski, C. (1973). *Africa counts; number and pattern in African culture*. Boston: Weber & Schmidt.

A cura di Giovanni Giuseppe Nicosia