Probability

MATEMATICANDO FESTIVAL 2024

SUPSI

Età	11 - 15 anni
Modalità	Piccoli gruppi
Durata	Circa 15 minuti per ogni postazione
Luogo	Aula
Parole chiave	Probabilità, giochi, intuizione probabilistica

Probability

Daniele Pezzi e Lorenzo Cosci

Competenze in gioco

Il laboratorio è rivolto ai traguardi dell'ambito Probabilità e statistica, con l'obiettivo di sviluppare la capacità di valutare in senso probabilistico alcune semplici situazioni di incertezza legate al vissuto. In particolare, in questo laboratorio vengono attivati i processi Esplorare e provare, Matematizzare e modellizzare e Comunicare e argomentare.

Lo sai che...

alcune intuizioni probabilistiche resistono all'insegnamento? Diversi studi indicano che migliorano poco anche dopo anni di scuola e interventi mirati, dunque diamoci da fare!

PRESENTAZIONE

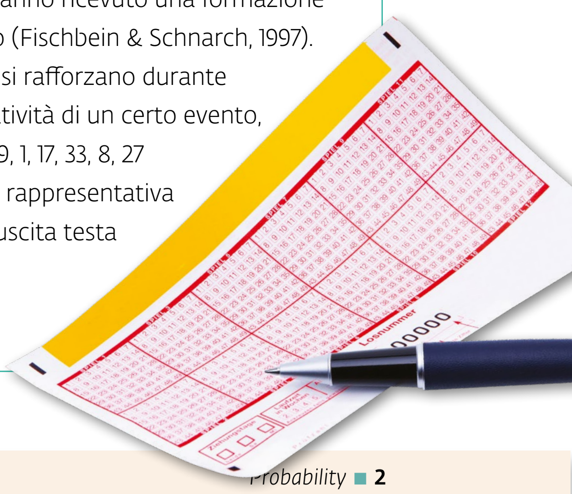
Nel quotidiano siamo continuamente chiamati a prendere decisioni di fronte a situazioni di incertezza, spesso ricorrendo ad intuizioni che non sempre risultano affidabili. Alcune riflessioni su situazioni probabilistiche come quelle qui proposte possono aiutare a riflettere su queste intuizioni, sulle ragioni alla base di queste intuizioni per cui alcune situazioni ci sembrano più probabili di altre, per comprendere come si possano fare scelte più consapevoli.

Le seguenti attività vertono su quiz legati alla realtà quotidiana inseriti in un contesto ludico, grazie ai quali gli allievi riflettono su alcuni concetti fondamentali della teoria della probabilità. Con queste proposte è possibile mettere in luce come, nella vita di tutti i giorni, ci troviamo spesso a dover compiere scelte influenzate da credenze o intuizioni non sempre affidabili, che possono essere invece controllate con maggiore consapevolezza grazie al calcolo della probabilità.

Queste proposte sono state presentate in modalità laboratoriale durante l'evento *Matematicando. A spasso con la matematica per le strade di Locarno*, edizione 2024, e sono destinate a studenti di scuola media. Prima di iniziare veniva spiegato o ricordato agli allievi partecipanti, tramite l'estrazione di una carta da un mazzo, la nozione di base di probabilità di un evento (il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili). Si consiglia di presentarla prima di proporre questi quiz. Le proposte qui riportate sono situazioni formulate in modo da indurre gli allievi ad affidarsi al proprio intuito, mostrando però, al contempo, come questo possa spesso rivelarsi fuorviante. Il calcolo della probabilità verrà quindi presentato come uno strumento affidabile e utile, capace di svelare e giustificare la risposta corretta anche laddove l'intuizione ci suggerisce una soluzione diversa, offrendo così l'opportunità di prendere decisioni più efficaci anche nella vita quotidiana.

La ricerca nell'ambito

La ricerca indica che, anche negli studenti di livelli scolastici superiori che hanno ricevuto una formazione specifica in probabilità, alcune radicate intuizioni probabilistiche persistono (Fischbein & Schnarch, 1997). I ricercatori evidenziano infatti come alcune misconcezioni probabilistiche si rafforzano durante la scolarità. Si tratta ad esempio dell'intuizione che riguarda la rappresentatività di un certo evento, per la quale sarà più probabile che durante una lotteria esca la sequenza 39, 1, 17, 33, 8, 27 piuttosto che la sequenza 1, 2, 3, 4, 5, 6 in quanto la prima è considerata più rappresentativa di una "generica sequenza". Allo stesso modo se, lanciando una moneta è uscita testa per cinque volte di fila, la nostra intuizione ci indurrebbe a pensare che sia più probabile che al prossimo lancio possa uscire croce.



DESCRIZIONE POSTAZIONI

Si predispongono quattro postazioni, ciascuna dedicata a una situazione probabilistica proposta sotto forma di quiz a risposta multipla o di gioco/sfida (vedi Allegato 1). La classe viene suddivisa in piccoli gruppi, che a rotazione visitano tutte le postazioni.

Ciascun gruppo dispone di un certo numero di gettoni da puntare sulla risposta ritenuta corretta e che va distribuito tra tutte le postazioni. L'uso dei gettoni è pensato per stimolare la discussione interna al gruppo, poiché la quantità puntata diventa un indice del grado di certezza condivisa dal gruppo. Al termine del percorso, viene stilata una classifica in base al numero di monete vinte.

Dopo aver affrontato tutte e quattro le postazioni, il docente conduce una discussione con tutta la classe, mostrando come sia possibile giungere alle risposte corrette attraverso ragionamenti matematici (vedi Allegato 2).

POSTAZIONE 1 – LANCIO DELLA MONETA

MATERIALE OCCORRENTE

Attrezzature:

- gettoni;
- monete Testa/Croce fisiche da poter lanciare.

Materiali cartacei:

- la scheda in Allegato 1.

Attività

Lanciando tre volte una moneta Testa/Croce, quale tra queste sequenze è meno probabile che esca?

- ☐ T – C – T
- ☐ T – T – C
- ☐ T – T – T
- ☐ Nessuna delle precedenti, hanno tutte la stessa probabilità.

Descrizione

In questa postazione gli allievi hanno a disposizione delle monete fisiche per sperimentare e verificare le sequenze ottenute. Attraverso l'esplorazione attiva, i gruppi confrontano le proprie intuizioni con i risultati, cercando di comprendere se esistano schemi più probabili di altri. Il distrattore più forte in questa attività è la sequenza T – T – T, poiché gli studenti tendono spesso a considerarla più "speciale" e quindi meno probabile rispetto a una sequenza in cui compaiano sia teste che croci. Il quesito fa infatti riferimento alla "misconcezione della rappresentatività" (Fischbein & Schnarch, 1997) per la quale si tende a stimare la probabilità di un evento in base a quanto questo evento "assomigli" a un evento generico dello stesso tipo. Se tiriamo cinque volte una moneta, ad esempio, saremmo piuttosto sorpresi di vedere comparire cinque volte testa e questo perché tendiamo intuitivamente ad attribuire un carattere speciale a schemi ordinati.

POSTAZIONE 2 – LA RUOTA DELLA FORTUNA

MATERIALE OCCORRENTE

Attrezzature:

- gettoni;
- una ruota numerata (da 1 a 10) che gli allievi possono far girare.

Materiali cartacei:

- la scheda in Allegato 1.

Attività

Dopo aver girato tre volte la ruota, quale tra queste sequenze di numeri <u>è più probabile che esca</u>?

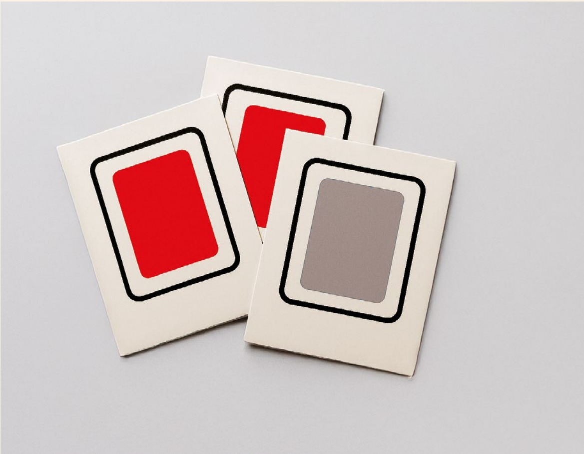
- ☐ 10 – 10 – 10
- ☐ 1 – 2 – 3
- ☐ 2 – 6 – 9
- ☐ Nessuna delle precedenti, hanno tutte la stessa probabilità.

Descrizione

In questa postazione i ragazzi possono utilizzare la ruota numerata, facendola girare per generare sequenze di numeri e osservare la frequenza degli esiti.

Anche questo quiz verte sulla "misconcezione della rappresentatività", come nel precedente caso, infatti, l'intuizione potrebbe indurre a pensare che la sequenza 2 – 6 – 9 sia più rappresentativa rispetto alle altre di una "sequenza generica", al contrario le sequenze ordinate 1 – 2 – 3 o le sequenze formate dallo stesso numero ripetuto tre volte 10 – 10 – 10 potrebbero apparire come più "speciali" e dunque meno probabili.

L'analogia tra questo quesito e il precedente è voluta, in quanto risulta molto formativo riconoscere lo stesso tipo di ragionamento in situazioni distinte.



MATERIALE OCCORRENTE

Attrezzature:

- gettoni;
- tre carte specifiche: una con due facce rosse, una con due facce nere e una con una faccia rossa e una nera, presenti nell' Allegato 1.

Materiali cartacei:

- la scheda in Allegato 1.

Attività

Se si estrae una carta e si vede che il colore di una faccia è ROSSO, qual è la probabilità che anche il retro della carta sia ROSSO?

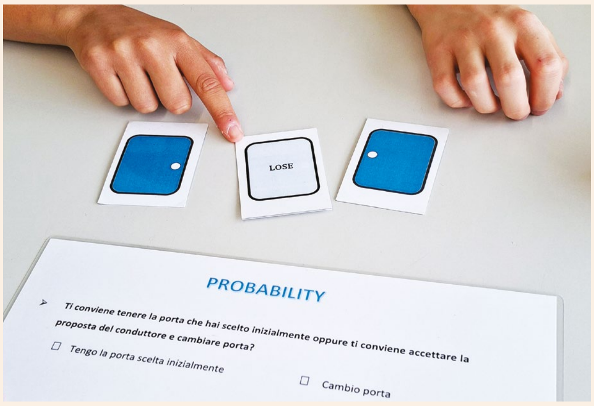
☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$

Descrizione

In questa postazione si dispongono tre carte: una con due facce rosse, una con due facce nere e una con una faccia rossa e una nera. L'attività è ripresa da un classico problema proposto da Warren Weaver nel 1950 e consiste nel mescolare le carte, estrarne una a caso, ponendola sul tavolo senza far vedere l'altro lato e rispondere alla domanda.

Gli studenti possono quindi usare le carte e giocare tra loro prima di rispondere. In questo caso il problema non si basa su una misconcezione nota, ma l'intuizione porta solitamente a rispondere che la probabilità sia pari al 50%, in quanto tra le carte che presentano una faccia rossa solo una di queste due mostra anche sull'altro lato il colore rosso; tuttavia, la risposta giusta è 2/3. La soluzione corretta può essere compresa valutando l'insieme delle facce, delle quali 3 sono rosse e 3 sono nere, nei tre possibili casi di faccia rossa, due comportano che la faccia posteriore sia ancora rossa. Una spiegazione del problema è illustrata nell' Allegato 2.



MATERIALE OCCORRENTE

Attrezzature:

- gettoni;
- tre carte che rappresentano graficamente tre porte sul fronte; sul retro una deve riportare la scritta “WIN” (auto) e le altre due la scritta “LOSE” (capre), presenti in Allegato 1.

Materiali cartacei:

- la scheda in Allegato 1.

Attività

Supponiamo che tu stia partecipando a un gioco a premi e ti venga data la possibilità di scegliere una delle tre porte. Dietro una porta c’è un’auto e dietro le altre due porte ci sono delle capre. Una volta scelta una porta, diciamo la n. 1 (che è chiusa), il presentatore, che sa cosa c’è dietro ogni porta, apre un’altra porta, dietro la quale c’è una capra. Ora ti viene data la possibilità di cambiare la tua scelta e scegliere la porta n. 2 o di rimanere fedele alla porta n. 1. Cosa faresti?

Domanda 1:

Ti conviene tenere la porta che hai scelto inizialmente oppure ti conviene accettare la proposta del conduttore e cambiare porta?

☐ Tengo la porta scelta inizialmente ☐ Cambio porta

Domanda 2:

Quale è la probabilità di vincita se mantieni la porta scelta inizialmente?

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$

Domanda 3:

Quale è la probabilità di vincita se cambi la porta?

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$

Descrizione

In questa postazione gli studenti hanno a disposizione tre carte, dietro le quali si celano due sconfitte e una vittoria, possono quindi simulare il gioco proposto, provando a mantenere oppure a cambiare la propria scelta. Il problema proposto è detto *problema di Monty Hall* e prende il nome dal conduttore di un gioco a premi statunitense che proponeva questo gioco tra il 1963 e il 1986. Si tratta di un problema particolarmente contro intuitivo, tanto che in uno studio di Granberg e Brown (1995) emerge che solo il 3% dei partecipanti ha risposto in modo corretto decidendo di cambiare porta.

Le difficoltà derivano dalla mancata comprensione che l'azione del conduttore aggiunge nuove informazioni. La porta aperta dal conduttore infatti non è casuale, ma dipende dalla porta selezionata inizialmente dal concorrente e dalla posizione del premio. L'intuizione comune riguarda il fatto che una volta eliminata una porta, la probabilità si ridistribuisca equamente, quindi che la probabilità di cambiare porta o meno sia indifferente e sia pari al 50%. In questo caso invece la nuova informazione non modifica la probabilità di aver scelto la porta corretta sin da subito, in quanto qualunque porta si sia scelta inizialmente è sempre possibile dire che anche una delle altre due porte sia perdente. Ci dice però che visto che la probabilità di rimanere sulla prima porta è rimasta pari a un terzo, l'altra porta ha ora probabilità due terzi di essere vincente. Una spiegazione del problema è illustrata nell' Allegato 2.

BIBLIOGRAFIA

DECS (Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport). (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. http://www.pianodistudio.ch

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.1.0096

Granberg, D., & Brown, T. A. (1995). The Monty Hall dilemma. *Personality and Social Psychology Bulletin, 21*(7), 711-723. https://psycnet.apa.org/doi/10.1177/0146167295217006

GLI AUTORI

Daniele Pezzi
(Docente di matematica SM Locarno 2)

Lorenzo Cosci
(Dottorando DDM)

Editore
Dipartimento formazione e apprendimento /
Alta scuola pedagogica - DFA/ASP, Locarno
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
- SUPSI
www.dfa.supsi.ch

Coordinamento progetto
Elena Franchini e Silvia Sbaragli
Centro competenze didattica della matematica (DDM),
SUPSI-DFA/ASP

Progetto grafico e impaginazione
Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi
e comunicazione, SUPSI-DFA/ASP

Immagini
© SUPSI
(Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica – pp. 4, 5, 6 e 8)

© stock.adobe.com
(natali_mis, link – p. 1 / janvier, link – p. 2 /
Krzysztof Bubel, link – p. 2 / by-studio, link – p. 2 /
APHOTOSTUDIO, link – p. 3 / Comugnero Silvana, link – p. 3)