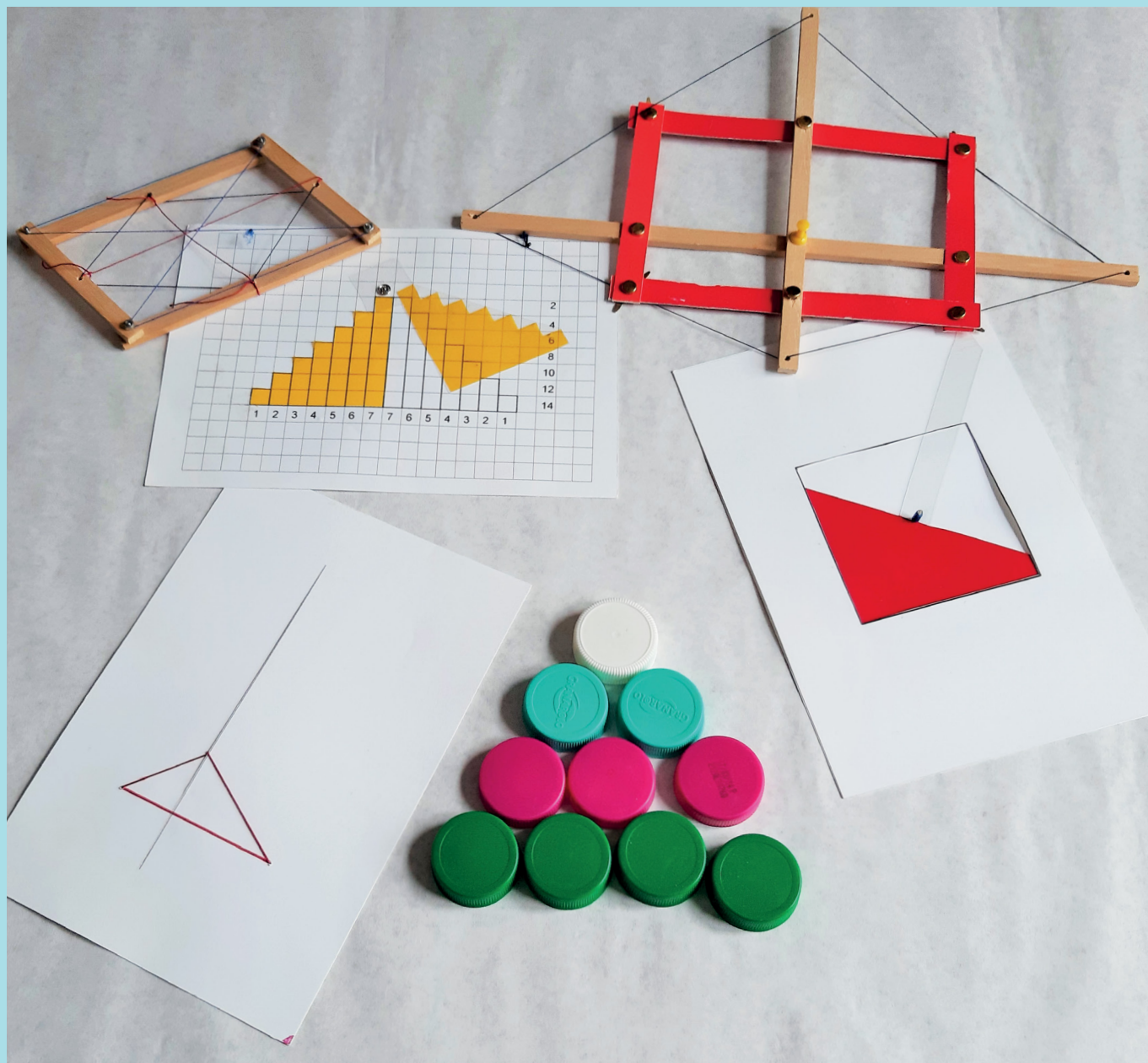


Fare matematica con le mani



Titolo

Fare matematica con le mani

Autori

Anna Maria Facenda, Ianna Nardi, Floriana Paternoster,
Daniela Rivelli, Daniela Zambon (Mathesis Pesaro)

Sede di lavoro

Ex docenti di matematica nella scuola primaria e secondaria

Età

8 – 14 anni

Parole chiave

Modelli dinamici; numeri figurati; generalizzazione; figure
piane; quadrilateri

Lo scopo del laboratorio è quello di mettere in contatto bambini – e anche adulti – con una matematica più “amichevole” ed accattivante, fatta con materiali semplici ed economici ma utilizzati in modo ingegnoso ed originale. Le attività prevedono inoltre la presentazione e la manipolazione di modelli matematici dinamici.

1. Presentazione

Lo scopo del laboratorio è quello di mettere in contatto bambini – e anche adulti – con una matematica più “amichevole” ed accattivante, fatta con materiali semplici ed economici ma utilizzati in modo ingegnoso ed originale. Le attività prevedono inoltre la presentazione e la manipolazione di modelli matematici dinamici, cioè articolabili oppure dotati di una o più parti mobili. Con il supporto di adeguate domande-stimolo o di semplici consegne, essi consentono di mettere in rilievo relazioni, analogie, differenze, varianti ed invarianti. Ne emerge una immagine della matematica più duttile, lontana dall'impostazione tradizionale fatta di regole, definizioni preconfezionate e rigide classificazioni. Parole

chiave dell'esperienza sono “osservazione” e “operatività”, unite al dialogo costante con il docente che ha il compito di sollecitare la verbalizzazione di quanto emerge e la formulazione di congetture. Il lavoro si può svolgere in piccoli gruppi (7-8 alunni), inoltre per questioni di tempo si possono fornire i materiali precedentemente predisposti. Tuttavia si suggerisce di prevedere la costruzione dei vari modelli da parte degli allievi in classe seguendo la traccia di apposite schede-guida e osservando gli esempi proposti dal docente: questo momento è altamente formativo e crea confidenza con gli oggetti dell'analisi, ne facilita la comprensione e stimola l'appropriazione dei concetti.

2. Descrizione Fasi

POSTAZIONE 1: *Fare matematica con i tappi*

Si mettono a disposizione di ciascun gruppo di allievi un certo numero (30) di tappi di plastica della stessa dimensione per rappresentare i numeri naturali con figure geometriche. L'attività può essere svolta anche con bottoni oppure oggetti simili. La modalità di lavoro è collettiva, seguendo le consegne del docente. La **prima consegna** è quella di prendere in considerazione i numeri naturali fino a 20 e di costruire con i tappi a disposizione degli schieramenti rettangolari. Questi si possono rappresentare anche su una lavagna magnetica, con l'uso di tappi magnetizzati. Dall'analisi degli schieramenti possono emergere diverse osservazioni: A) alcuni numeri, come ad esempio 8, 12, 15... consentono di costruire schieramenti diversi, come per esempio 12×1 , 6×2 , 4×3 , 1×12 , 2×6 e 3×4 per il 12. Questo permette di riprendere anche il concetto di commutatività mostrando i due

tipi di schieramento (12×1 e 1×12); B) altri numeri, come ad esempio 3, 5, 11... presentano invece un solo schieramento, a meno di rotazioni (applicazione della proprietà commutativa): sono i numeri primi; C) ci sono poi dei numeri che presentano uno schieramento quadrato come ad esempio 4, 9 e 16: sono i “numeri quadrati”. A questo proposito, potrebbe succedere che alcuni allievi accettino con difficoltà che anche gli schieramenti quadrati siano rettangolari, con la motivazione che “il quadrato non è un rettangolo”. Questo potrebbe offrire l'occasione per ribadire – o se necessario introdurre – l'inclusione dell'insieme dei quadrati nell'insieme dei rettangoli.

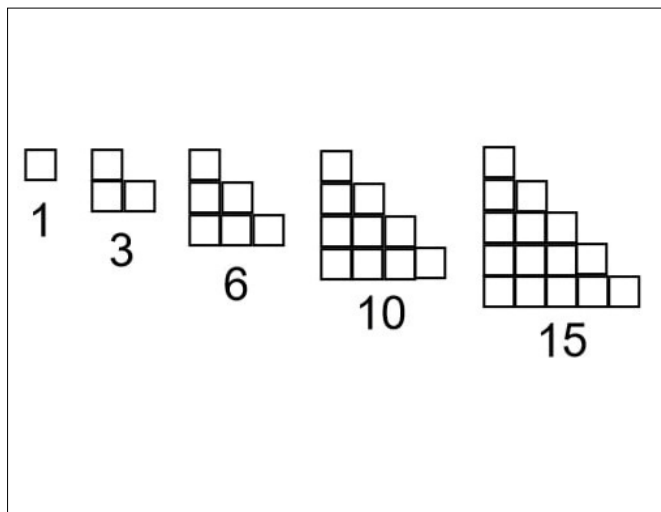
La **seconda consegna** è quella di costruire, sempre con i tappi, degli schieramenti triangolari, in cui in ogni lato ci sia lo stesso numero di tappi.



I bambini costruiscono facilmente i triangoli di tappi e dopo averne disposti tre o quattro possono intuire la regola che governa l'accrescimento dei triangoli: ad ogni nuova riga dello schieramento bisogna aggiungere un tappo in più rispetto alla riga precedente. Sollecitati dal docente, gli alunni hanno la possibilità di scoprire la connessione tra il valore dell' n -esimo numero triangolare e la somma dei primi n numeri naturali: ad esempio, 15 che è il quinto numero triangolare corrisponde alla somma dei primi 5 nume-

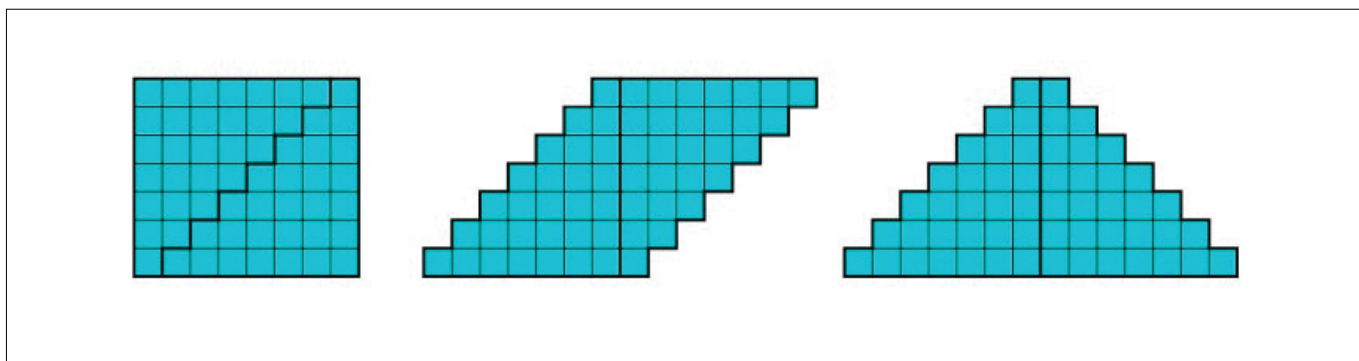
ri naturali: $1 + 2 + 3 + 4 + 5$. È una scoperta interessante, ma se n è grande diventa lungo e complicato trovare il valore dell' n -esimo numero triangolare. Come fare?

Prima di rispondere alla domanda, si consiglia di introdurre una piccola modifica nella modalità di rappresentazione degli schieramenti rettangolari: ogni unità viene adesso rappresentata da un quadratino e gli schieramenti hanno la forma di triangoli rettangoli.

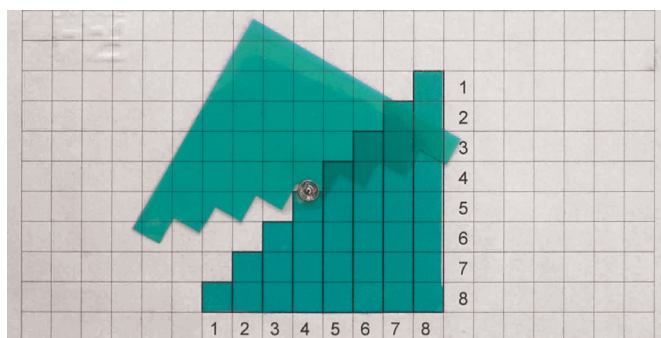


È bene accertarsi che gli allievi capiscano che le due rappresentazioni sono equivalenti, ma che quest'ultima permette di fare ulteriori considerazioni geometriche che aprono alla generalizzazione. Si distribuiscono quindi delle sagome di carta, a forma appunto di triangolo rettangolo, che rappresentano il passo successivo ad esempio il sesto numero triangolare.

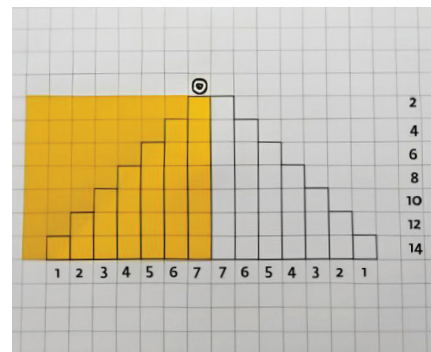
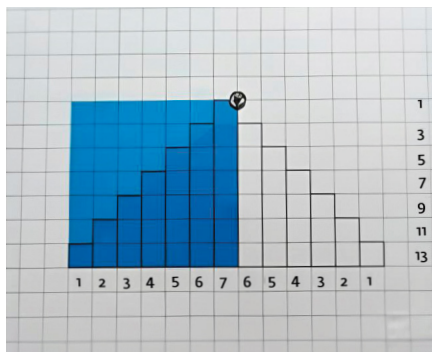
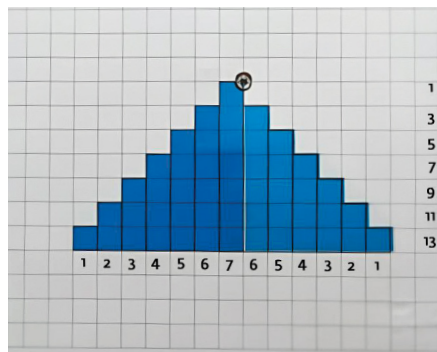
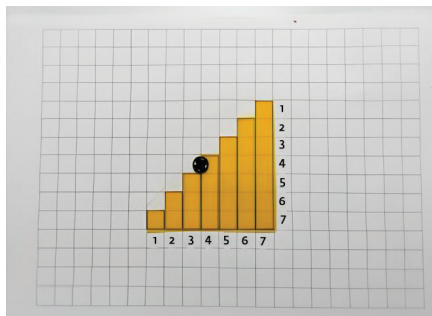
Si chiede agli alunni di accostarle a due a due in modo da ottenere un quadrilatero di cui sappiano calcolare l'area; si possono costruire configurazioni rettangolari ma anche a forma di parallelogramma o di trapezio come mostrato in figura.



Si prenda ad esempio il caso in cui si forma un rettangolo; questo ha un lato che supera di una unità il lato consecutivo: nel caso del sesto numero triangolare, un lato sarà lungo 7 unità e il lato consecutivo 6; il valore del sesto numero triangolare corrisponde alla metà dell'area di tale rettangolo, cioè: $7 \times 6 / 2 = 21$. Generalizzando, il procedimento si può scrivere così: $n \times (n + 1) / 2$. A questo punto si mostrano agli alunni dei modelli dinamici che rappresentano, in maniera esteticamente più raffinata, la stessa procedura. Sono visibili nell'immagine qui a fianco e in quelle riportate di seguito.



Sempre con l'uso di sagome di carta a forma di triangolo rettangolo e di modelli si possono mostrare la somma dei primi n numeri dispari e dei primi n numeri pari.



POSTAZIONE 2: *Fare matematica con i legnetti*

Si predispongono numerosi modelli articolabili, costruiti con legnetti e viti in alcuni casi arricchiti con elementi in filo elastico e non. Lo scopo dell'attività in questa postazione è costruire definizioni di quadrilateri in un'ottica di classificazione inclusiva, in modo da intuire come le diverse figure sono in relazione tra loro. I modelli "quadrato articolabile" e "rettangolo articolabile" permettono di mettere a fuoco il collegamento tra quadrato e rombo e tra rettangolo e parallelogramma generico (si vedano i seguenti [Filmato 1](#) e [Filmato 2](#)).

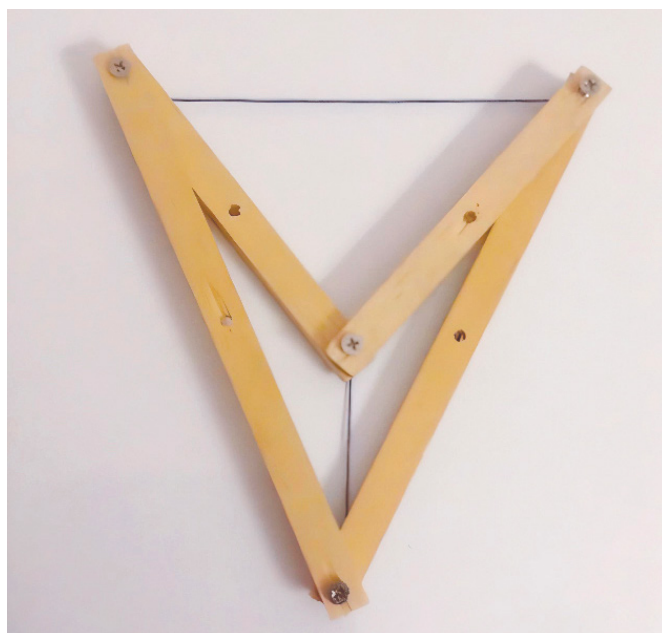
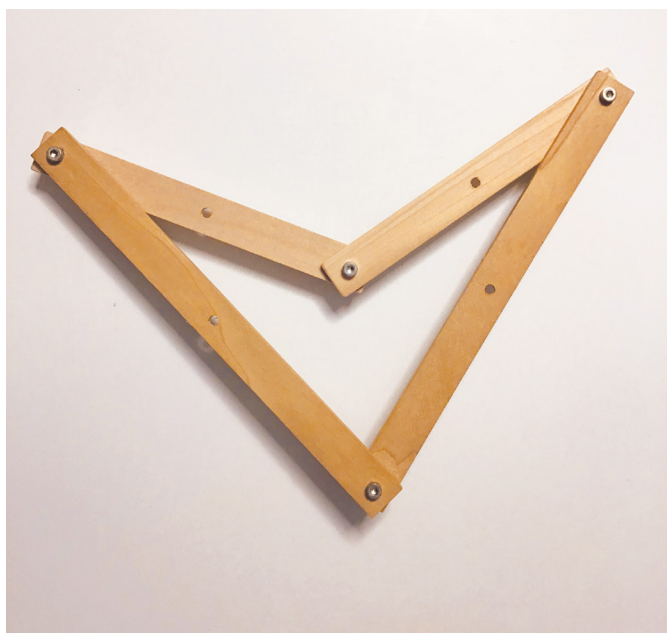


L'aggiunta delle diagonali in filo elastico arricchisce il campo di osservazione (si vedano i seguenti [Filmato 3](#) e [Filmato 4](#)).



Si può presentare anche un modello di deltoide articolabile, anch'esso con le diagonali, che consente di rilevare come le diagonali non siano necessariamente interne alla figura e di intro-

durare i concetti di figure concave e convesse (si veda il seguente [Filmato 5](#)).



Sulla costruzione e utilizzo di questi modelli concreti si può consultare anche l'esperienza descritta nella scheda didattica "[Osservo, imparo, definisco: i parallelogrammi](#)".

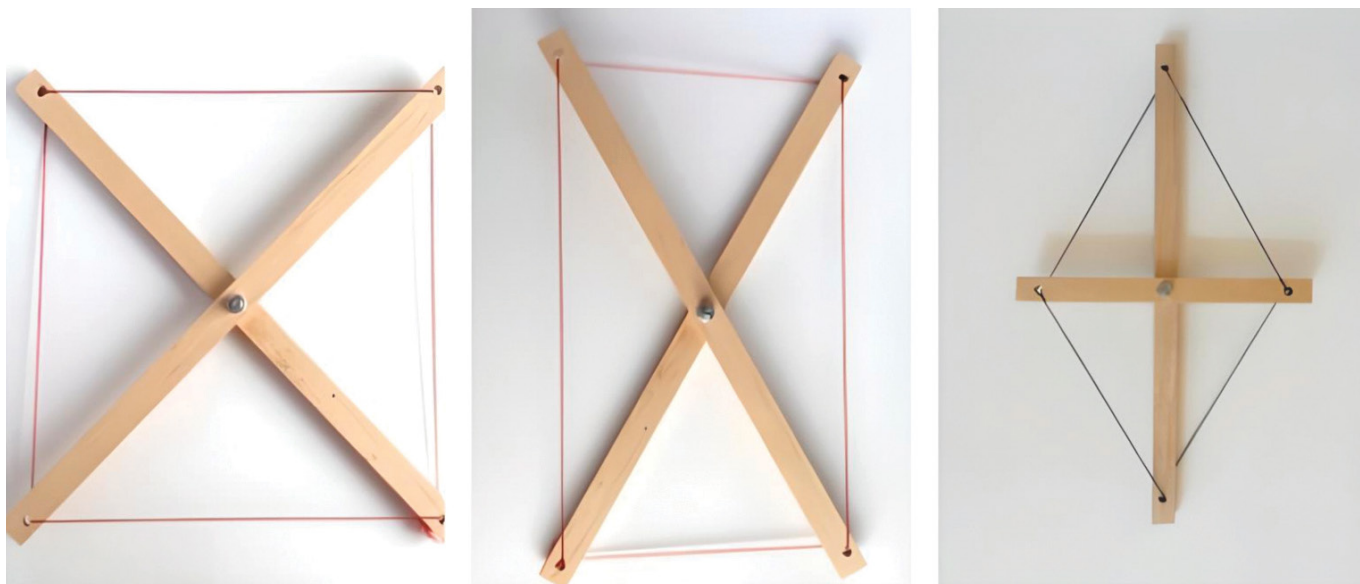
I modelli necessari sono disposti sul tavolo, a disposizione degli alunni, che sono invitati a manipolarli liberamente per rispondere alle consegne:

1) *prova a muovere i modelli e osserva che figure si formano; dai loro un nome e di' quante se ne formano di ogni tipologia;*

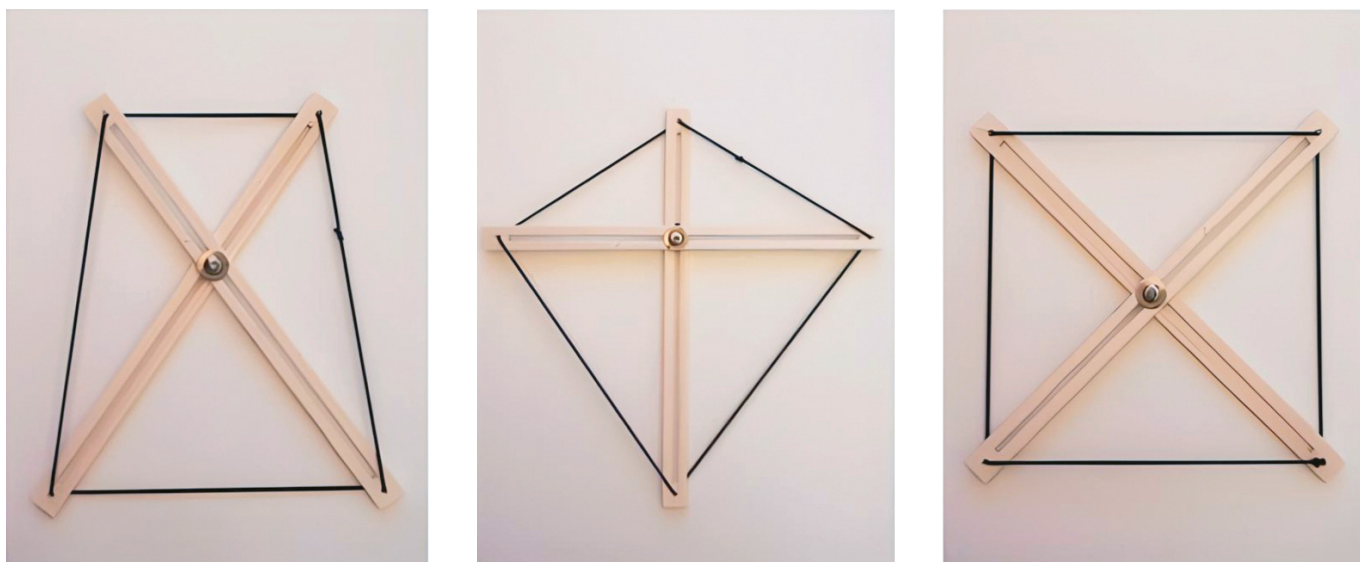
2) *nel movimento, cosa cambia e cosa non cambia nei lati? E negli angoli?*

3) *nel movimento, l'area e il perimetro delle figure cambiano? Giustifica la tua risposta.*

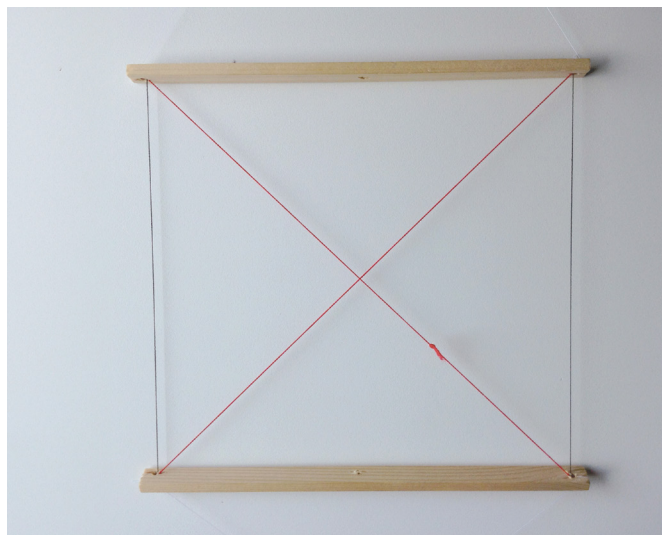
Si possono prendere in considerazione anche modelli costruiti con le diagonali in legno e i lati in elastico, per esaminare le relazioni tra le figure anche dal punto di vista delle diagonali.



Un altro modello, con le diagonali scanalate, ha consentito di ampliare la casistica delle figure prese in esame (si veda il [Filmato 6](#)).

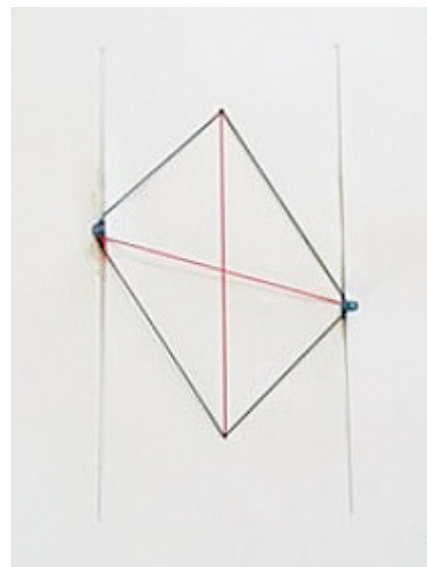
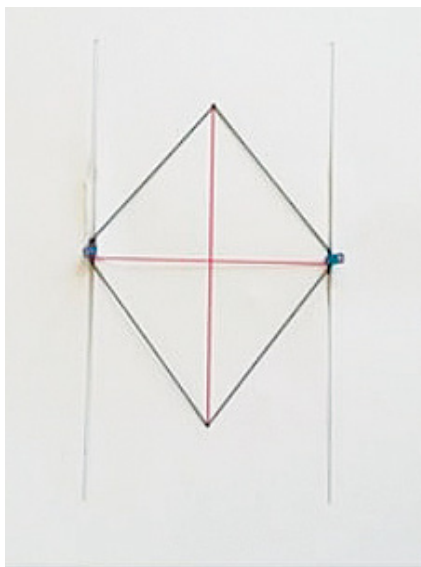
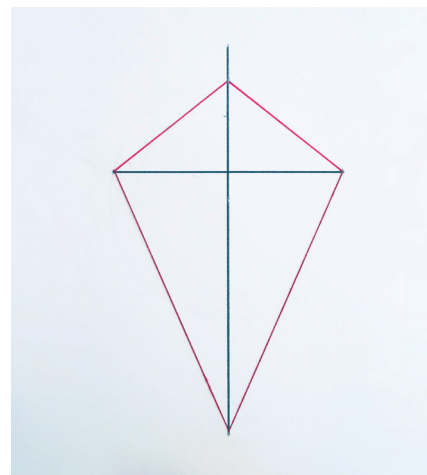
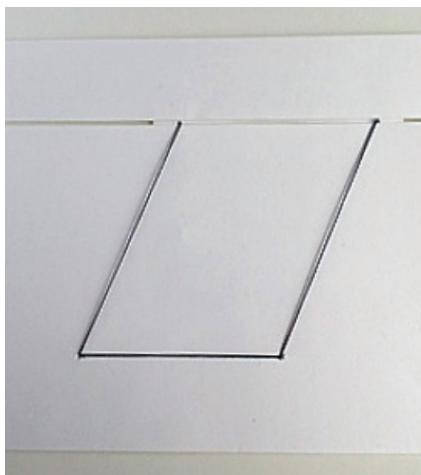
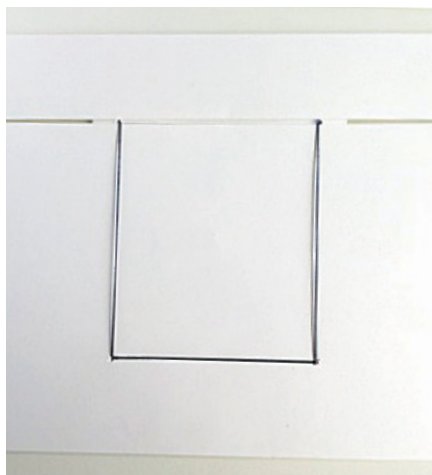
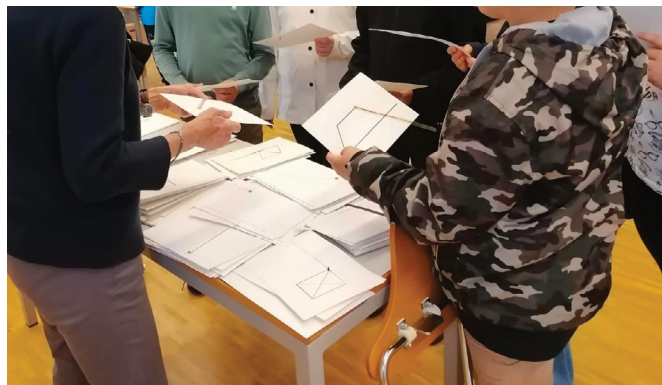


Interessante è anche l'utilizzo dei modelli che sono stati chiamati "tuttofare" (si veda il [Filmato 7](#)): questi sono particolarmente versatili e danno la possibilità di rendere più ampia e completa la rete di relazioni tra i diversi quadrilateri.



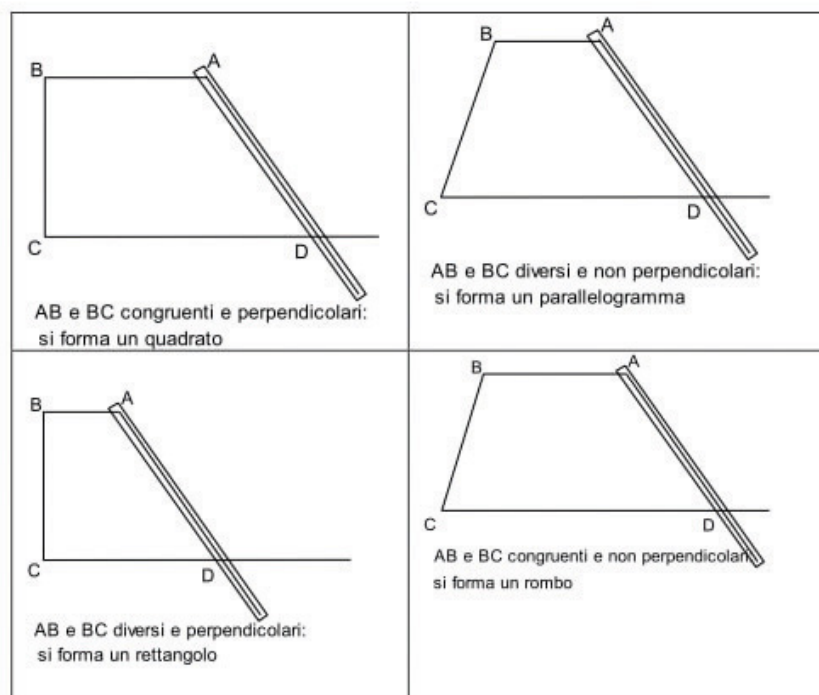
POSTAZIONE 3: Fare matematica con cartoncini, fermacampioni e filo elastico

Anche in questa postazione gli allievi hanno a disposizione dei modellini dinamici, costruiti su cartoncino tipo F4 e con elementi movibili grazie a fermacampioni e filo elastico.



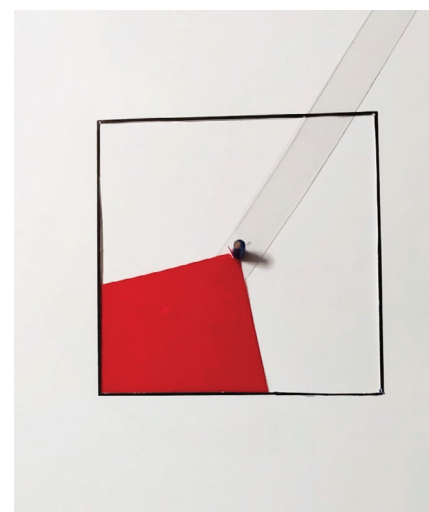
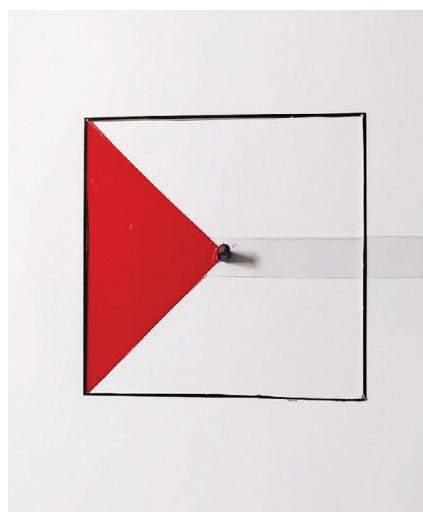
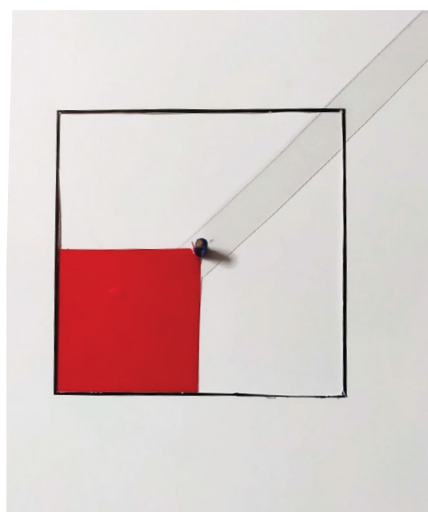
Come esempio del tipo di lavoro che si può svolgere, si descrivono qui le attività con il modello "Trapezi"; questo può essere disponibile nella postazione in quattro versioni che si differenziano per la posizione reciproca di uno dei lati non paralleli e per la

lunghezza di questo stesso lato in confronto con il lato parallelo più corto del trapezio. L'altro lato non parallelo è mobile, grazie ad un fermacampione.



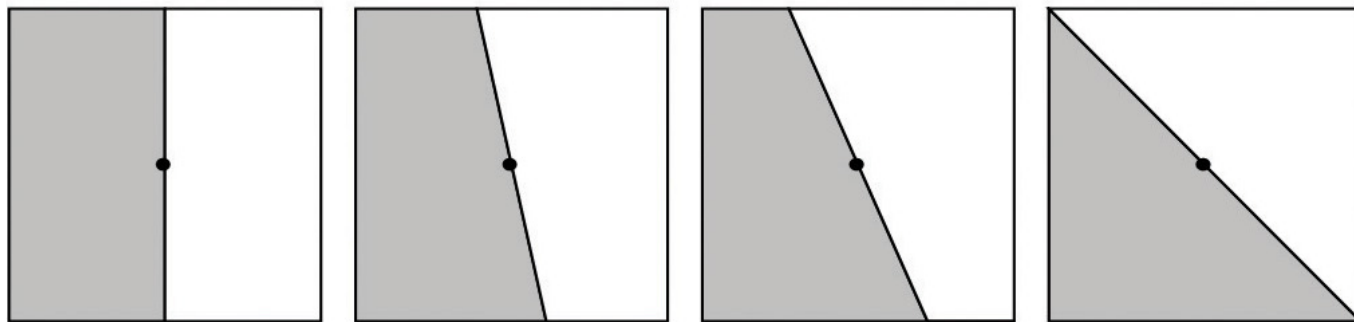
Gli alunni sono invitati a spostare il lato mobile e ad osservare e descrivere le figure che si ottengono. Oltre a nominarle, devono anche dire quante figure si formano per ogni tipo. In tutte le tipologie di modello si osservano infiniti trapezi, uno solo dei quali ha però caratteristiche tali da essere individuato con un suo specifico nome: un parallelogramma generico, un rombo, un rettangolo (si veda il [Filmato 8](#)).

Con gli alunni si può discutere sulla motivazione di questo risultato e sul suo significato in rapporto alle relazioni tra i quadrilateri citati e l'insieme dei trapezi. Si può così giungere alla conclusione che tutti i quadrilateri "speciali" ne fanno parte. Diverso invece il lavoro che si può svolgere con il modello "poligoni in cornice" (si veda il [Filmato 9](#)).



Agli allievi si chiede di ruotare la figura interna mediante l'apposita linguetta; dopo aver identificato i tipi di figure che si formano, l'attenzione è indirizzata sulle variazioni di area e perimetro. Per approfondire l'utilizzo di questi artefatti si consiglia la lettura della scheda didattica ["Girando dentro una cornice quadrata... cosa può succedere?"](#).

Inoltre si può mettere in evidenza un'analogia con quanto si può ottenere cercando in quanti modi è possibile piegare a metà un quadrato di carta; seppur alcuni alunni si fermeranno alle due soluzioni più immediate ed intuitive, cioè la piegatura seguendo una mediana e seguendo una diagonale, può emergere che ci sono molte più soluzioni: tutte le piegature che passano per il centro del quadrato, quindi infinite.



Si sottolinea come spesso i modelli di una postazione possono essere utilizzati come esempi o controesempi nel corso del lavoro in altre postazioni, mettendo in evidenza l'estrema duttilità dei

materiali esposti e consentendo di mettere in atto un utile interscambio tra aree diverse della matematica.

Materiali

- ✓ Tappi di bottiglia o bottoni
(tutti uguali per forma, ma anche di diverso colore),
- ✓ una lavagna magnetica,
- ✓ cartoncino tipo F4,
- ✓ filo elastico,
- ✓ legnetti forati al centro e alle estremità,
- ✓ fermacampioni,
- ✓ viti con bulloncino.

3. Spazi necessari

È sufficiente un tavolo abbastanza ampio per ogni gruppo di lavoro; i gruppi possono lavorare nella stessa aula.

Bibliografia e sitografia

Barra, M., & Castelnovo, E. (1976). *Matematica nella realtà*. Bollati Boringhieri.

Castelnovo, E. (1963). *Didattica della matematica*. La Nuova Italia.

Castelnovo, E., (1972). *Documenti di una esposizione matematica*. Bollati Boringhieri.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pi-tagora Editrice.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J., & Paternoster, F. (2002). Piegando un quadrato: prima parte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 25A(1), 7–34.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J., & Paternoster, F. (2002). Piegando un quadrato: seconda parte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 25A(2), 111–132.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J., & Paternoster, F. (2003). I modelli dinamici: costruzioni di immagini mentali e avvio alla deduzione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 26A-B(6), 715–738.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2008). Uso integrato di Cabri e modelli dinamici: resoconto di una esperienza sui parallelogrammi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31A(5), 429–444.

Facenda, A. M., Nardi, J., & Zambon, D. (2010). Osservare, riconoscere, giustificare figure geometriche: proposta didattica con modelli dinamici e Cabri. *L'educazione Matematica*, 2(2), 43–62.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2011). Tutte le strade portano al quadrato. Resoconto di un percorso di insegnamento apprendimento. In S. Sbaragli (A cura di), *Buone pratiche d'aula in Matematica*. Pitagora.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2014). *Volare con la matematica: un percorso operativo di geometria dinamica (ebook)*. Digital Docet.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2015). Area e perimetro e modelli dinamici: un incontro efficace. *L'educazione Matematica*, 5(3), 21–46.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2018) Una esperienza di geometria dinamica sui trapezi: analisi critica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 41A(3), 331–360.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2018). Deltoidi come aquiloni. Un volo attraverso la geometria. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (3), 116–134.

Vigotskij, L. S. (1989). *Pensiero e linguaggio*. Giunti.

<http://mathesispesaro.altervista.org>

<https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/incontri-ravvicinati-con-i-triangoli/>

<https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/osservo-imparo-definisco-i-parallelogrammi/>

<https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/girando-dentro-una-cornice-quadrata-cosa-puo-succedere/>



Fare matematica con le mani

Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).

Autori: Anna Maria Facenda, Ianna Nardi, Floriana Paternoster,
Daniela Rivelli, Daniela Zambon

I testi hanno subito una revisione redazionale curata
dal Centro competenze didattica della matematica (DDM).

Grafica e impaginazione:
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
SUPSI - Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica

**Fare matematica con le mani**

è distribuito con Licenza Creative Commons
Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale