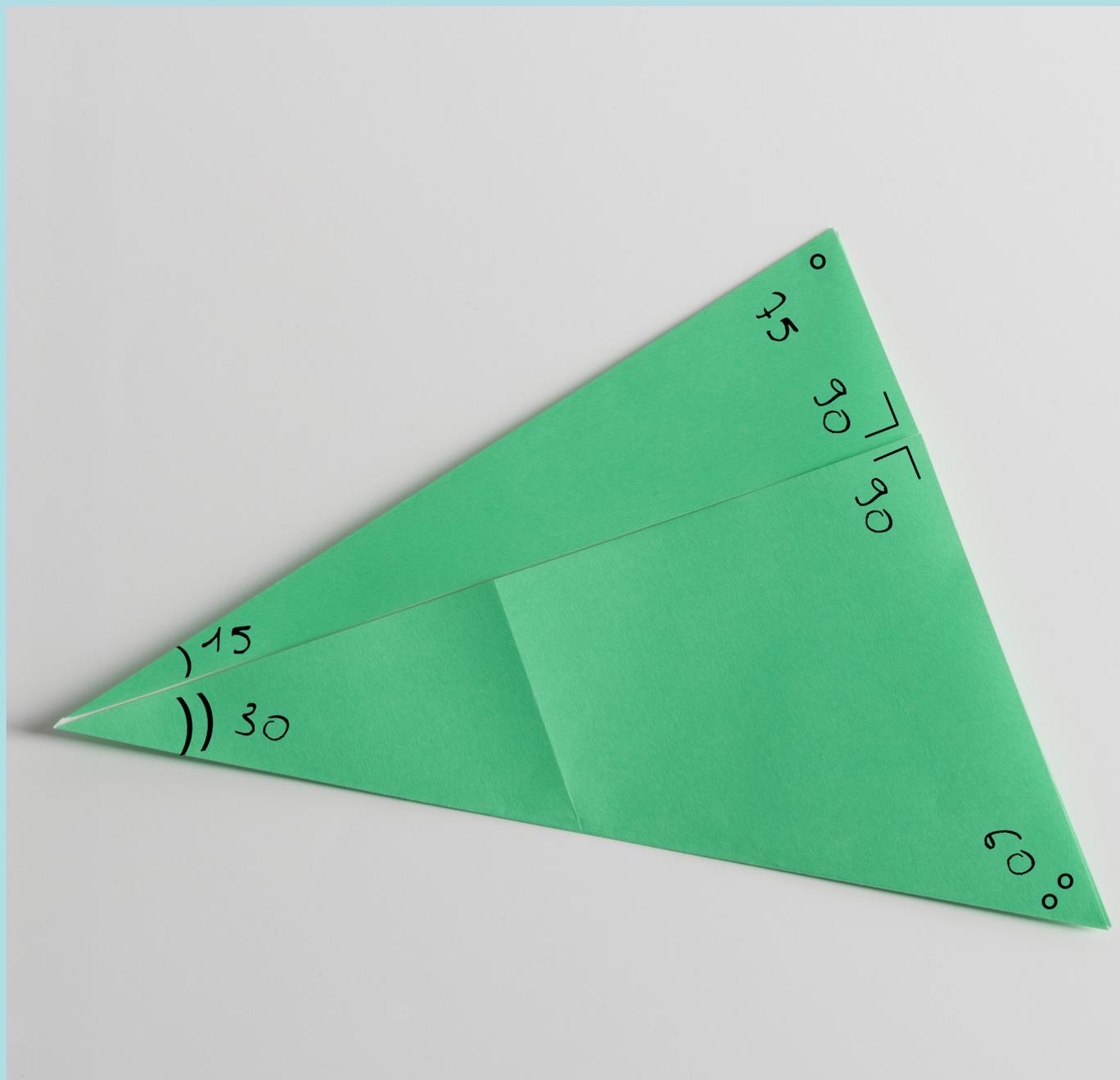


Occhio all'angolo!

**Titolo**

Occhio all'angolo!

Autori

Maria Luisa Spreafico

Sede di lavoro

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

Età

7 - 13 anni

Parole chiave

Angolo; goniometro; costruzioni; origami

Questo laboratorio ha molteplici scopi. Prima di tutto verrà costruito con la carta un semplice goniometro che riporta angoli con ampiezze multipli di 15° . In un secondo momento, il goniometro potrà essere utilizzato per organizzare giochi a squadre divertenti e coinvolgenti.

1. Presentazione

Questo laboratorio ha molteplici scopi. Prima di tutto verrà costruito con la carta un semplice goniometro che riporta angoli con ampiezze multipli di 15° (saranno rappresentati quelli fino a 120°). La costruzione è vantaggiosa perché non solo lo strumento è più facile da usare rispetto agli usuali goniometri semi-circolari o circolari, ma soprattutto perché il processo di costruzione, e quindi di apprendimento passa attraverso il fare (piegare la carta) con le mani. Questa fase del lavoro sarà svolta dai singoli studenti sotto

la regia dell'insegnante che coinvolgerà tutti in una discussione/spiegazione condivisa.

In un secondo momento, il goniometro potrà essere utilizzato per organizzare giochi a squadre divertenti e coinvolgenti, che faranno scoprire un nuovo modo di guardarsi intorno, rivelando la matematica sotto "angolature" inaspettate. Per esempio, avete mai fatto caso a quanti angoli formi un cane che chiede le coccole?

2. Descrizione Fasi

FASE 1: Un semplicissimo misuometro

Questa fase è dedicata ai più piccoli. Può essere proposta come fase unica per i bambini di 7-8 anni oppure essere introduttiva alla fase 2 per quelli di 9 anni. Non è necessario invece proporla agli allievi da 11 anni in su.

Proponiamo la costruzione di quello che alcuni bambini hanno definito "misuometro". Si tratta di un semplicissimo strumento per stabilire se un angolo è acuto, retto oppure ottuso. L'angolo discriminante è ovviamente quello retto che viene introdotto dopo aver definito le rette perpendicolari. Proponiamo allora alla classe la definizione:

*Si dicono perpendicolari due rette che dividono il piano in 4 parti congruenti (cioè uguali).
I quattro angoli formati da queste rette, che sono tutti tra loro congruenti (cioè uguali), si dicono retti.*

Per costruire angoli retti (con verifica pratica), procuriamoci 4 foglietti tipo memo quadrati, tutti della stessa dimensione; si consiglia di prenderli di circa 10 cm di lato. Posizioniamoli come in Figura 1, con un lato comune a due a due e un vertice V in comune. Il piano resta suddiviso in 4 parti tutte uguali, perché così erano i foglietti. Allora ognuno dei 4 angoli che hanno vertice in V è retto. Utilizzeremo allora un foglio memo come "misuometro", andando a sovrapporre uno dei suoi angoli retti sugli angoli che si vogliono misurare.

In Figura 2 sono mostrate alcune possibili misurazioni. Sono stati piegati (con carta da riciclo) alcuni angoli; sono state evidenziate in arancione le semirette che li delimitano. Sono stati poi posizionati due misuometri per verificare che l'angolo a sinistra è ottuso e

quello a destra acuto, in quanto la loro ampiezza risulta essere rispettivamente maggiore e minore di quella evidenziata dal misuometro. Osserviamo che il fatto di aver piegato e non disegnato gli angoli ha un doppio vantaggio: l'angolo resta tangibile all'esplorazione dei bambini, inoltre il misuometro può essere posizionato sopra ad esso, nel caso di angolo ottuso, e sotto nel caso di angolo acuto, permettendo così una buona visualizzazione della situazione.

Nel caso dei bambini più piccoli, si può saltare la fase 2 e andare direttamente al gioco spiegato nella fase 3.

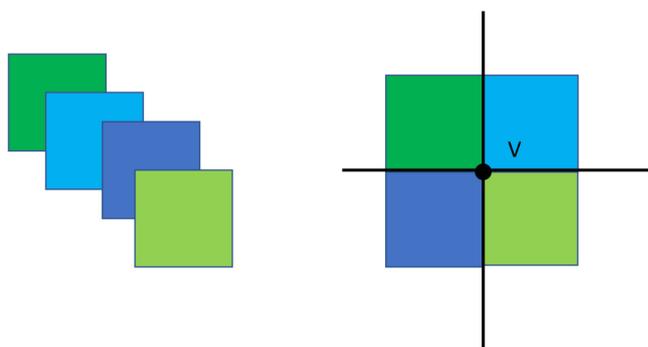


Figura 1. I misuometri.

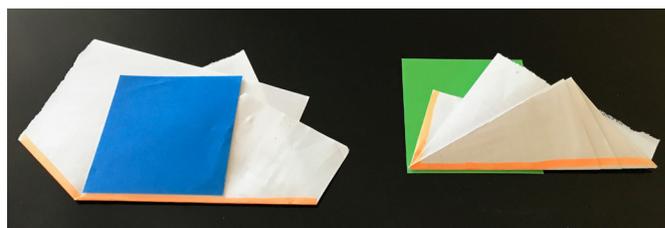


Figura 2. Esempi di classificazione di angoli con il misuometro.

FASE 2: Pieghiamo il goniometro

Per affrontare questa fase è necessario che gli allievi sappiano che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è di 180° . Il tema può essere sviluppato in diverse modalità a dipendenza delle abilità degli allievi e del livello di profondità e completezza che si vuole raggiungere con la dimostrazione. Qui riportiamo un paio di link che possono essere utili al docente:

https://www.youtube.com/watch?v=kfrj8FLE_Mk

<https://www.youtube.com/watch?v=fNY8Vb-2gm4>

In questa fase ci dedichiamo alla piegatura del modello origami di goniometro. Questo modello evidenzierà i multipli dell'angolo di ampiezza 15° , fino a 120° .

La piegatura darà modo di ripassare alcune caratteristiche dei triangoli, necessarie per la costruzione del goniometro, in modo pratico e divertente.

La base da cui partire è questo diagramma di piegatura (Frigerio, Spreafico, 2018) disponibile in [Allegato 1](#):

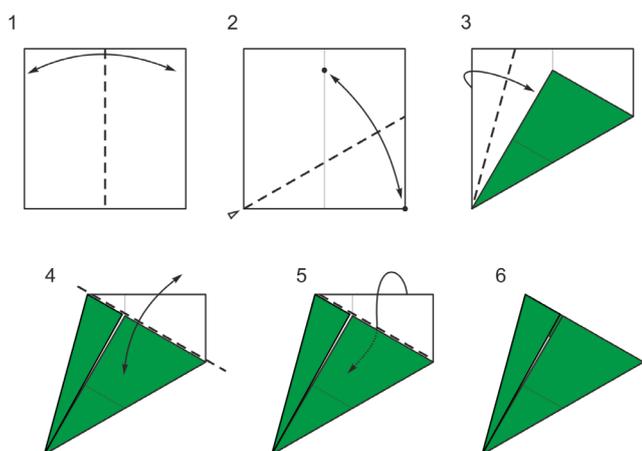


Figura 3. Diagramma di piegatura del goniometro.

Descriviamo brevemente i vari passaggi. Chiameremo *Passo n*, la piega illustrata in Figura 3 con il relativo numero *n*. Durante la spiegazione saranno introdotte delle domande che si possono proporre alla classe.

Con l'utilizzo della tecnica dell'origami, si stimolano i ragazzi a rispondere basandosi sulle operazioni eseguite con le pieghe. Questa modalità, che è rigorosa perché segue precisi assiomi della geometria, aiuta quegli studenti che hanno necessità di "vedere" e "fare" per capire meglio i concetti.

Si distribuisce ad ogni alunno un foglio di carta quadrata bicolore, che andrà posizionata sul banco con la faccia bianca rivolta verso l'alto.

- *Passo 1.* Piegare lungo una mediana¹ del quadrato, portando un lato sul lato opposto e riaprire.
- *Passo 2.* Ora va portato il vertice del quadrato in basso a destra² sulla mediana e va piegato in modo che la traccia passi dal vertice in basso a sinistra. Questa piega può risultare non semplice per i ragazzi. Possiamo consigliare loro di portare il vertice in basso a destra sul punto della mediana ad esso più lontano, senza piegare, e farlo scorrere fino a che la piega che verrebbe schiacciando la carta non passi per il vertice in basso a sinistra. Segniamo con una matita il punto che determiniamo sulla mediana.

Riapriamo ora la piega e uniamo con la matita il punto che abbiamo segnato, con i due vertici alla base del quadrato. Ciò che si ottiene è rappresentato in Figura 4: le prime due pieghe fatte e i segmenti AE ed EB tracciati a matita.

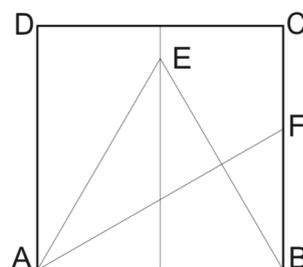


Figura 4. Tracce (pieghe e segmenti disegnati) rilevabili sul foglio.

Di seguito si riportano alcune domande che possono essere poste alla classe per stimolare la riflessione e l'argomentazione.

Che tipo di triangolo è ABE?

Il triangolo è sicuramente isoscele perché AE e BE si sovrappongono piegando lungo la mediana. Osservando che AE è stato ottenuto "riportando" AB con la piega (operazione che sostituisce l'uso del compasso), possiamo concludere che il triangolo ABE è equilatero.

Individua tutte le ampiezze di angoli che conosci.

Dal fatto che il triangolo ABE sia equilatero si deduce che $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = \widehat{AEB} = 60^\circ$. Inoltre, dato che $\widehat{DAB} = 90^\circ$, si ha $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} - \widehat{EAB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Possiamo anche osservare che la piega AF risulta la bisettrice dell'angolo \widehat{EAB} , perché si sovrappongono le porzioni di carta nella piegatura, quindi $\widehat{BAF} = \widehat{FAE} = 30^\circ$.

1. Il termine mediana viene generalmente usato solo per i triangoli; qui lo useremo per indicare l'unica piega che unisce i due punti medi dei lati opposti di un quadrato.

2. Partire da un vertice rispetto ad un altro è ininfluente nella costruzione, tuttavia è necessario mantenere coerenza nei passi successivi. La scelta presa in questa descrizione dipende dal fatto che si sta seguendo il diagramma della Figura 3 e per gli allievi risulta molto più facile avere un riferimento grafico, tuttavia si può partire dal vertice che si preferisce (meglio però uniformare tutta la classe alla scelta).

Se consideriamo il triangolo ABF, usando nuovamente il fatto che la somma delle ampiezze degli angoli interni è 180° , possiamo dedurre che $\widehat{BAF} = 60^\circ$; questo comporta che $\widehat{AFC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

La Figura 5 mostra i dati discussi e raccolti.

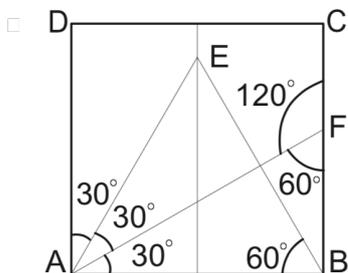


Figura 5. Angoli trovati tra le pieghe.

- *Passo 3.* Richiudere l'ultima piega fatta (AF) e portare il lato AD sulla linea di cambio colore, come mostrato nel diagramma. Si ottiene il seguente modello che l'insegnante può ridisegnare alla lavagna per coordinare la discussione.

La Figura 6 mostra anche i nuovi angoli individuati dalle pieghe.

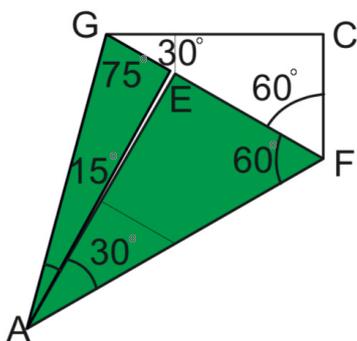


Figura 6. Angoli dopo *Passo 3*.

Per capire la loro ampiezza, possiamo porre queste domande ai ragazzi:

Cosa rappresenta l'ultima piega fatta per l'angolo \widehat{DAE} ? Cosa possiamo concludere sulla misura di \widehat{GAE} ?

La piega rappresenta la bisettrice dell'angolo e per questo $\widehat{GAE} = 15^\circ$.

Quanto misura l'ampiezza dell'angolo \widehat{AGE} ?

Notiamo che $\widehat{AEG} = 90^\circ$ perchè è l'angolo del quadrato di partenza. Quindi:

$$\widehat{AGE} = 180^\circ - \widehat{AEG} - \widehat{GAE} = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

Quanto misurano le ampiezze degli angoli \widehat{GFC} e \widehat{FGC} ?

Ragioniamo per \widehat{GFC} ; per l'altro angolo il discorso è analogo, va solo adattato alle diverse misure di angoli. Pensiamo di riaprire la carta e considerare l'angolo piatto in F. Quando pieghiamo lungo AF, l'angolo ampio 60° si sovrappone ad un altro della stessa misura. Quindi la porzione di carta bianca che "avanza" descrive un angolo di ampiezza $60^\circ (= 180^\circ - 2 \times 60^\circ)$.

- *Passo 4.* Piegare lunga la linea di cambio colore (segmento GF) e riaprire.

- *Passo 5.* Intascare il triangolo sotto le due alette colorate (cioè sotto ai due triangoli colorati GAE e AFE). Si ottiene il modello rappresentato dal *Passo 6* nel diagramma.

Il goniometro è completato! Il risultato finale si può vedere in Figura 7.

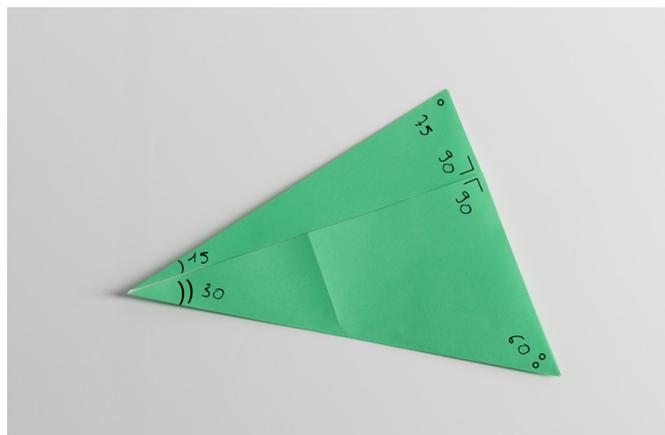


Figura 7. Il goniometro completato.

Osserviamo due fatti interessanti:

1. possiamo sfruttare tutti gli angoli della parte colorata, ma anche aprire il goniometro e usare gli angoli bicolori in G ed F che misurano 105° e 120° , rispettivamente. Abbiamo anche a disposizione l'angolo retto in C.
2. Abbiamo trovato angoli delle seguenti misure: $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ$.

FASE 3: Ed ora giochiamo

In questa fase gli allievi potranno utilizzare il goniometro costruito in una sfida con i compagni.

Preparazione dei materiali. L'insegnante preparerà a casa delle foto (una decina), ritagliando anche riviste o scattando e stampando opportune situazioni simpatiche nelle quali, anche inaspettatamente, si possano individuare degli angoli. A mano, o con l'ausilio di GeoGebra, andrà a evidenziare alcuni angoli.

In classe. Si propone un gioco a squadre in cui si richiede di stimare l'ampiezza di un angolo.

Scopo del gioco

Ciascuna squadra, a colpo d'occhio, deve dire quanto misura l'angolo indicato, dando un valore compreso tra due multipli consecutivi di 15° .

Regole del gioco

Dividiamo gli alunni in squadre e mostriamo una foto alla volta. Ogni squadra avrà 3 minuti per discutere e il caposquadra consegnerà la risposta all'insegnante.

A turno, un componente di una squadra misura con il goniometro l'ampiezza dell'angolo individuando i due multipli di 15° tra i quali essa è compresa. Dopo ogni turno si cambia la squadra addetta al controllo del risultato.

Verrà assegnato 1 punto per ogni risposta corretta e 0 per ogni risposta errata. Vince la squadra (o le squadre) che ha totalizzato più punti.

Come in ogni gioco è molto importante premiare i vincitori. Basteranno delle caramelle o uno "sconto" sui compiti!

Nelle immagini riportate in Figura 8, sono mostrati due esempi di foto e di angoli (evidenziati graficamente con l'ausilio di GeoGebra). La prima foto mostra uno scorcio di realtà nel quale è evidente l'invito alla lettura degli angoli; la seconda invece vuole stimolare insegnanti e ragazzi a guardare con occhi diversi il mondo intorno: anche in un cane (quello nella foto è Dora) che chiede le coccole si nascondono molti angoli!

Per i bambini di 7-8 anni si può ripetere il gioco chiedendo solo se l'angolo presente sia acuto, retto oppure ottuso.



Figura 8. A sinistra: ponte tibetano (Turbigio); a destra: Dora che chiede le coccole. Per completezza diamo le ampiezze degli angoli (approssimate): per il ponte tibetano, e per Dora, l'ampiezza dell'angolo giallo è rispettivamente di 10° , e 108° , mentre l'ampiezza di quello verde è rispettivamente di 42° e 70° . Le foto sono disponibili nell'[Allegato 2](#).

FASE 4: La sfida

Una volta capito lo spirito del gioco, possiamo rendere i ragazzi protagonisti nella costruzione di una sfida.

Preparazione dei materiali. Ogni squadra dovrà trovare immagini o foto nelle quali andare a leggere angoli "nascosti". Ogni squadra dovrà scegliere e segnare un angolo per immagine, misurarne l'ampiezza con il goniometro (sempre stabilendo tra quali multipli di 15° essa sia compresa), trascrivendo il risultato su un foglio. Per questa attività si potrà lasciare qualche giorno di lavoro autonomo per la raccolta delle immagini e poi un momento in classe, a gruppi, per misurare l'ampiezza degli angoli. Il numero di foto che ogni gruppo deve reperire deve essere uguale al numero di squadre meno uno.

In classe. Si propone un gioco a squadre analogo al precedente in cui si richiede di stimare l'ampiezza di un angolo.

Scopo del gioco

Ciascuna squadra, a colpo d'occhio, deve dire quanto misura l'ampiezza dell'angolo indicato in ciascuna foto, dando un valore compreso tra due multipli consecutivi di 15° .

Regole del gioco

Fissato il giorno della sfida, ogni gruppo consegnerà una foto con evidenziato un angolo ad ognuna delle altre squadre. Ogni squadra avrà 20 minuti per discutere e il caposquadra scriverà le risposte su un foglio. Il tempo è indicativo e dipende dal numero di squadre.

Al termine dei 20 minuti, a turno ogni squadra svelerà le ampiez-

ze degli angoli da lei proposti e le altre squadre autovaluteranno la loro risposta. Non solo, verificheranno la correttezza dei valori svelati, utilizzando il goniometro costruito.

Verrà assegnato 1 punto per ogni risposta corretta e 0 per ogni risposta errata. Si può anche introdurre il punteggio di -1 se la squadra che ha proposto l'angolo ha sbagliato a misurarlo nella fase preparatoria. Vince la squadra (o le squadre) che ha totalizzato più punti.

Anche in questo caso l'insegnante decide quale premio assegnare.

Se gli allievi conoscono e utilizzano abitualmente GeoGebra, si può anche chiedere di importare le immagini nel software e calcolare con precisione l'ampiezza dell'angolo, nella fase di preparazione dei materiali, colorando gli angoli, come mostrato in Figura 8.

Buon divertimento!

Materiali

Attrezzature: ✓ cancelleria ordinaria (pennarelli o matite colorate, righello), ✓ fogli quadrati di lato lungo circa 10 cm, ✓ carta quadrata bicolore, possibilmente bianca da un lato e colorata dall'altro, con lato lungo circa 15 cm (la carta quadrata è preferibile origami per via dello spessore, ma andrà bene anche ritagliata da fogli a quadretti e colorata su una delle due facce), ✓ fotografie o ritagli di giornale.

Materiali cartacei: il diagramma di piegatura del goniometro ([Allegato 1](#)), le foto di Dora e le foto del ponte tibetano di Turbigo ([Allegato 2](#)).

3. Spazi necessari

Gli alunni lavoreranno in aula in modo individuale durante la costruzione del goniometro e a squadre nei giochi.

Bibliografia e sitografia

Frigerio, E., Spreafico, M. L. (2018) *Ed ora, Origami- 18 laboratori di Matematica con l'origami*. Ed. Kangourou. ISBN: 978-88-89249-59-8

Spreafico, M. L., Tramuns, E. (2020) *Origami bases: from folds to maths; poster interattivo, con lezioni correlate*. Disponibile in <https://www.tarquingroup.com/the-origami-and-mathematics-posterpack.html> (consultato il 18.11.2020).

Siti utili

https://blog.matematica.deascuola.it/aree_disciplinari/origami/

<http://www.foldingtogether.org/team.htm>

https://www.youtube.com/watch?v=kfrj8FLE_Mk

<https://www.youtube.com/watch?v=fNY8Vb-2gm4>

Occhio all'angolo!

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Autori: Maria Luisa Spreafico

Una pubblicazione del progetto *Communicating Mathematics Education*
Finanziato dal Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica.
Responsabile del progetto: Silvia Sbaragli,
Centro competenze didattica della matematica (DdM).

I testi hanno subito una revisione redazionale curata
dal Centro competenze didattica della matematica (DdM).

Progetto grafico: Jessica Gallarate
Impaginazione: Luca Belfiore
Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI



Occhio all'angolo!

è distribuito con Licenza Creative Commons
Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale